

## 1. はじめに

ターボ機械など高速回転体の設計では、回転体の振動問題が重要な課題の一つとなる。回転体の振動は破壊事故や騒音の原因となるので<sup>1, 2)</sup>、信頼性が高く静粛性の良い機械を開発するためには、振動を予測・防止する振動解析技術が必要となる。

回転体の振動は、Tondl<sup>3)</sup>やGasch<sup>4)</sup>に代表されるように古くから研究されている。回転体の振動には前向きと後ろ向きの振れ回りがあるため、一般構造物の振動解析に使われる有限要素法(FEM)の適用が困難である。そこで、従来から線形振動の範囲では伝達マトリックス法を使った回転体独自の振動計算法が確立され<sup>5)</sup>、Fig. 1に示すような計算機を利用した解析システムで実際の設計評価に使われている<sup>5, 7)</sup>。また、計測機器やFFTなど信号処理技術の発展により回転体の振動計測技術も年々進歩しており、解析システムと併用した現象解明や運転中の振動診断に役立っている<sup>8)</sup>。以上のように、線形振動については、実用的な設計・評価に供し得る理論体系および実験技術が構築されている。

その一方で、ターボ機械では性能向上のため高速化が進み、軸受などの非線形性に起因する振動問題が増えてきている。そのため、近年は非線形振動の研究が盛んである。不釣合いによる定常・強制振動やブレード破損時などの非定常振動については、実用的な解析技術が開発されている。しかし、不釣合い強制振動とすべり軸受のオイルホイップなどが達成する強制・自励系の振動についてはあまり研究が進んでいない。強制・自励系の振動は小型ターボ

機械でよく観測されるが、回転数に対して振動の様相が変化する分岐など、従来の理論体系では扱われなかった非線形現象が観測される。このような強制・自励系振動の解明には、実験技術の高度化と共に、計算機を利用した非線形振動の解析技術を更に発展させていく必要がある。

本稿では、小型ターボ機械の強制・自励系振動の解析法に焦点をあてながら、高速回転体の振動解析技術の現状を解説する。始めに回転体の基本現象とその扱い方を説明する。次に、非線形振動の研究動向を整理し、研究が進んでいる定常・強制振動や非定常振動の解析法の中から、実用的な手法を取り上げそのアルゴリズムを紹介する。後半では、本稿のねらいとする強制・自励系振動の解析技術の現状をまとめ、今後の展望を述べる。

## 2. 高速回転体の振動現象

### 2.1 回転体の構造と振動モデル

高速回転体の代表例として、ガスタービンの回転体をFig. 2に示す。ガスタービンの回転軸は、複数の翼車(円板)が付き、複数の転がり軸受で支持される。軸受部には潤滑油の漏れを防止するため、シール部品が使われる。軸受外輪部の外側には振動低減のためスクイズフィルムダンパが使われることが多い。なお、回転軸の出力は継手を介して減速機へ入力される。このようにターボ機械の回転体は、軸、軸受、シール、ダンパ、継手で構成される。

このような回転体の振動現象はFig. 3に示す力学モデルで表現できる。軸部分は分布質量をもつ弾性はありで、翼車の円板はジャイロモーメントを

#### キーワード

回転体, 振動, ターボ機械, 強制振動, 自励振動, 非線形振動, 調和バランス法, モード法, 中心多様体理論

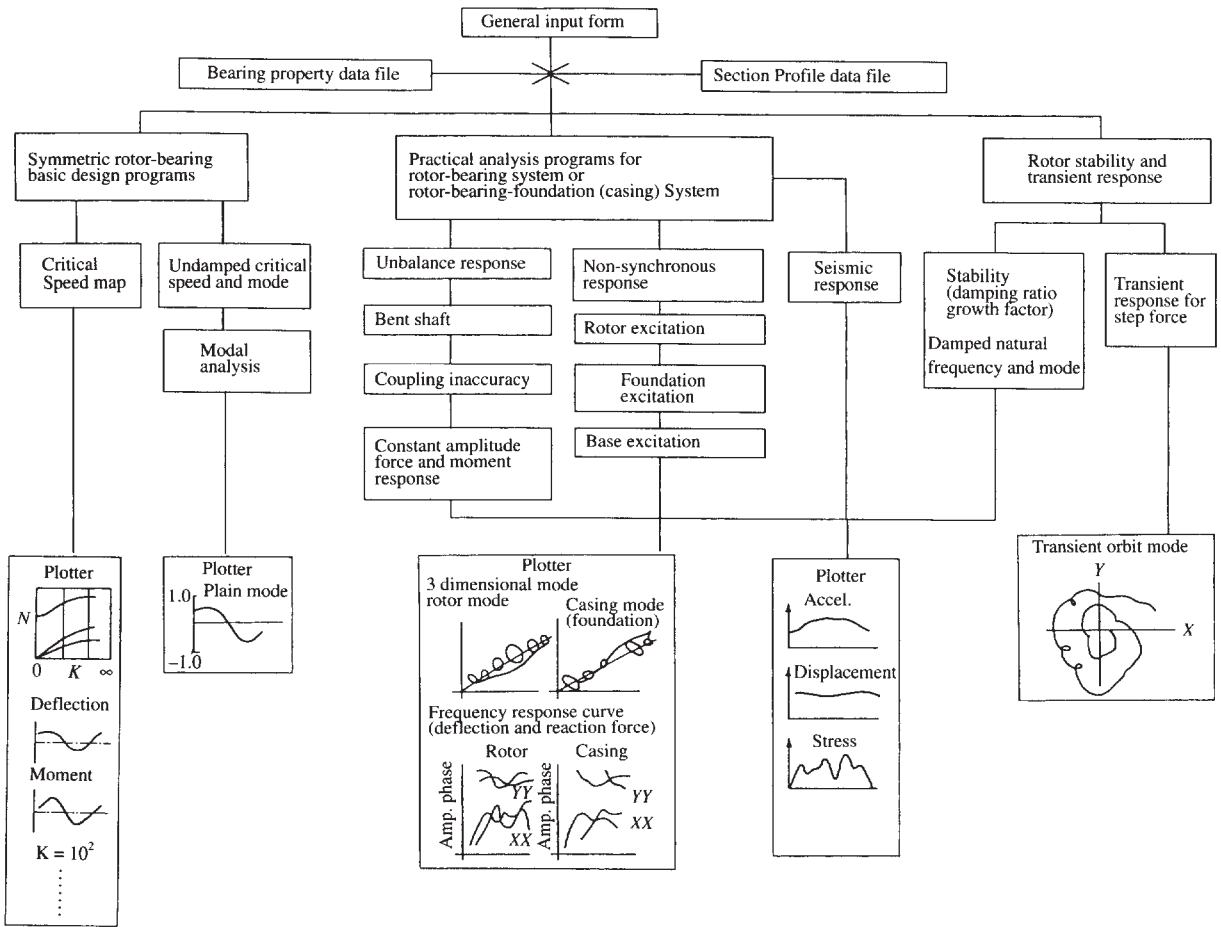


Fig. 1 MHI rotor dynamic program system (1983)<sup>5)</sup>.

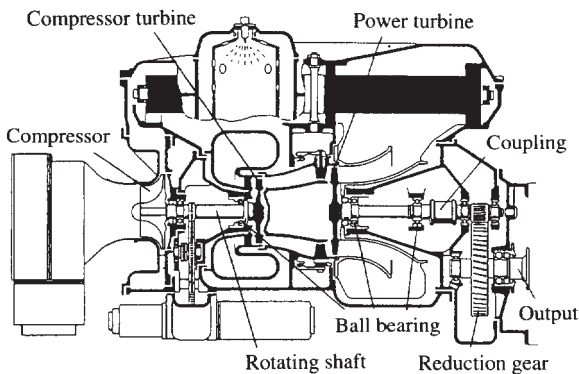


Fig. 2 Rotor-bearing system of gas turbine engine.

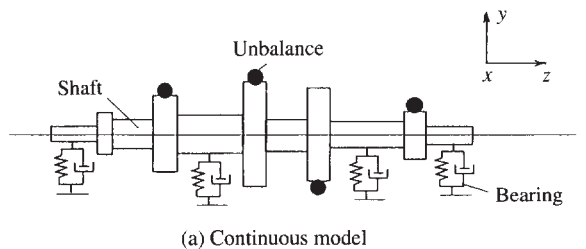


Fig. 3 Multi rotor-bearing system.

考慮するため質量と慣性モーメントをもつ剛体で近似される。軸受、シール、ダンパ、継手の各要素はばねとダッシュポット（減衰要素）としてはたらく。加振力としては不釣合いを円板や軸部に付加させる。

## 2.2 軸受などの非線形特性

回転体の振動系では、軸受はばね要素として作用すると共に、振動を減衰させるはたらきもある重要な構成要素である。この軸受のばね特性や減衰特性が線形近似できる場合を線形振動系、線形近似できないケースを非線形振動系と呼ぶ。

Fig. 4 に軸受のばね特性を示す<sup>9,10</sup>。軸受部にガタなどの組み付け誤差がなく、微小な変位を扱

う場合は、Fig. 4 (a)のようにばね特性は線形で表現できる。軸受の外輪に微妙なガタ（クリアランス）がある場合には、Fig. 4 (b)のように不感帯をもつ折れ線型の非線形ばね特性となる<sup>11,12</sup>。また、ガタに半径方向の偏りがある場合には、Fig. 4 (c)のように非対称な折れ線型のばね特性となる。また、軸受の外輪がOリングなどで支持されている場合は、Fig. 4 (d)のように振幅が大きくなると硬くなる漸硬型のばね特性を示す。これらの非線形ばね特性は、一般にFig. 5 (e)のように3次曲線などの多項式曲線で近似できる。この場合、2乗成分は非対称成分、3乗成分は対称成分を表す。

## 2.3 回転体の基本現象

Fig. 5 (a)の基本ロータモデルで回転体の線形振動を説明する<sup>4</sup>。ロータが $\omega$ で回転すると、不釣合い遠心力が強制力となって、Fig. 5 (b)のような振れ回り $\phi$ が発生する。振れ回りには方向性があり、自転と公転の向きが同じ場合を"前回り"、自転と公転が逆向きの場合を"後ろ回り"と呼ぶ。一般には、前回りと後ろ回りが重なって発生することになる。

Fig. 5 (c)のように、円板の質量を $m$ 、円板の形心 $S(x, y)$ と重心 $G$ の距離を $e$ とすると、線形振動の運動方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= me\omega^2 \cos \omega t \\ m\ddot{y} + c\dot{y} + ky &= me\omega^2 \sin \omega t \end{aligned} \quad (1)$$

$k$ は軸のばね定数、 $c$ は減衰定数、右辺は不釣合い強制力を示す。式(1)の振動解は $\omega$ の調和成分として次式で表される。

$$\begin{aligned} x &= R \cos(\omega t - \delta) \\ y &= R \sin(\omega t - \delta) \end{aligned} \quad (2)$$

$R$ は振れ回りの振幅、 $\delta$ は振れ回りと不釣合いの位相差を表す。運動方程式から $R$ 、 $\delta$ を求めるとFig. 5 (d)の共振曲線が得られる。回転速度 $\omega$ が回転体の固有振動数 $P_0 = \sqrt{k/m}$ と一致する付近で振幅は極大となる。この共振点を危険速度と呼び、この前後で振れ回りの位相 $\delta$ が約 $180^\circ$ 変化する。

以上が線形系の基本現象である。Fig. 4 (e)のように軸受が非線形ばね特性をもつような場合には、回転体の振れ回りは式(2)のような調和成分だけでは表現できず、回転速度 $\omega$ の整数分の1（分数調和）や整数倍（超調和）の成分を含むことになる。非線形現象の種類は次章で紹介する。

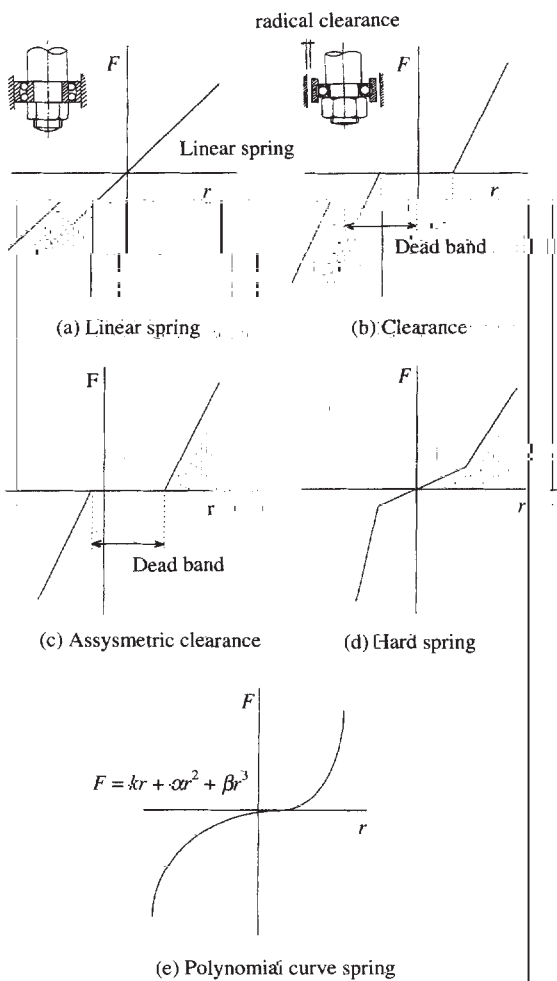


Fig. 4 Non linear spring model.

### 3. 高速回転体の非線形振動とその研究動向

高速回転体の振動は現象の種類と解析法の違いから、Table 1に示すように定常・強制振動、非定常振動、自励振動、強制・自励系振動、カオス振動の5種類に分類できる。Table 2に各振動の解析法を示す。

定常・強制振動は不釣り合い強制力によって励起される定常的な振り回り振動で、調和振動、分数調和振動、クラックロータ振動がある。このうち非線形系の定常・強制振動は、Table 2に示すように調和バランス法、等価線形化法、部分構造合成法を応用した手法などで解析される。

非定常振動は、軸受部のガタや回転体と静止部の接触摩擦が関係する非線形振動で、フリクションホイップ、ブレード破損、危険速度通過、地震応答による過渡振動がある。これらは逐次積分法、モード積分法、擬似モード法、増分伝達マトリックス法による数値シミュレーションで解析される。

定常・強制振動と非定常振動については、非線形系の振動もおおよそ解明されており、Table 2の解析法を用いた実用的な設計支援システムも確立されつつある。次章では、定常・強制振動の解析法の代表例として、簡便な調和バランス法と、実際の機械の設計評価に有効な部分構造合成法を解説する。また、第5章では、非定常振動の解析に有用な擬似モード法を紹介する。

自励振動は回転体の平衡点が動的に不安定になるために発生する不安定振動で、構造減衰、オイルホイップ、スチームホワール、シール不安定振動がある。例えば、オイルホイップは、すべり軸受のばね特性に水平方向と垂直方向の連成が生ずるために平衡点が不安定になって発生する。これらの自励振動は発生すると機械の破壊につながる危険性が高いので、その発生を防止するための解析技術が古くから研究されている。そして、Table 2に示すように線形解析による安定判別法が確立され、自励振動が発生する臨界速度を予測できるようになってきている<sup>3, 2, 5, 7)</sup>。

他方、小型のターボ機械などでは軸受技術の発展により、自励振動が発生しても故障なく運転さ

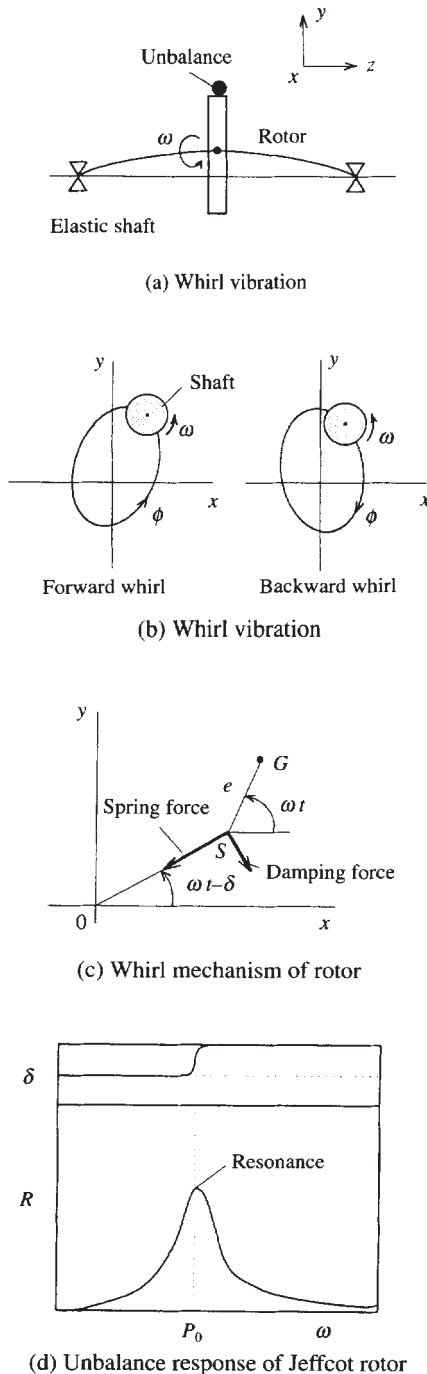


Fig. 5 Whirl vibration of Jeffcot rotor.

れるケースがある。この場合には、不釣合いによる強制振動と自励振動が連成する強制・自励系の振動となる。強制・自励系では回転数などのパラメータによって振れ回りの様相が複雑に変化する分岐現象が見られる。回転体の強制・自励系振動には、不釣合いと構造減衰の連成振動<sup>39)</sup>や不釣合いとオイルホイップの連成振動<sup>40)</sup>がある。解析法としては、Table 2に示すように定常・強制振動や非定常振動で実績のある調和バランス法や逐次積分法が使われる。また、分岐現象についてはカオス振動の前兆現象として、最近の非線形力学の分野で盛んに研究されている。そこで、非線形力学で発展してきた分岐理論や中心多様体理論(位相幾何学)も強制・自励系の解析に応用され始めている。

強制・自励系についてはVan der Polの方程式に

代表されるように非線形力学の分野で以前から研究されている<sup>58)</sup>。しかし、回転体の振動現象については未解明の部分が多く、その解析法も実用レベルまで達していない。最近では、不釣合い振動とオイルホイップの連成系でカオスが観測された例も報告されている<sup>45)</sup>。今後はカオスの対象としても強制・自励系の研究が進み、多様体論などの非線形数学を応用した解析法がいろいろ開発されるものと思われる。第6章では、強制・自励系振動の特徴と、解析技術の現状・課題を詳説する。

#### 4. 定常・強制振動の解析法

##### 4.1 調和バランス法

定常・強制振動のうち調和振動は回転数に同期する振動で、線形系ではFig. 5に示したような振れ回りとなる。軸受に非線形ばね特性があると危

Table 1 Nonlinear vibration and factor of rotating machinery.

( $\Omega$ : Rotor speed,  $P_f$ : Forward natural frequency,  $P_b$ : Backward natural frequency)

| Category & name                                     |                                       | Whirl frequency $p$             | Factor  | Reference              |
|---|---------------------------------------|---------------------------------|---|------------------------|
| Steady-state forced vibration (Unbalance vibration) | Harmonic (1st order)                  | $p = \Omega$                    | Mass unbalance<br>Shaft misalignment<br>Thermal misalignment      | 11<br>12               |
|   | Sub-harmonic ( $1/n$ order)           | $p = \Omega/n$                  | Bearing mis-alignment<br>Bearing clearance<br>Squeeze film damper | 13<br>14, 15<br>16, 17 |
|   | Crack rotor                           | $p = 2\Omega$                   | Asymmetric shaft stiffness  | 20, 21                 |
| Transient vibration                                 | Friction whip                         | $p = P_f, P_b$                  | Rubbing friction  | 22, 23, 24             |
|   | Blade loss                            | $p = \Omega, P_f, P_b$          | Blade loss under running  | 25, 26                 |
|   | Pass through critical speed           | $p = \Omega,$<br>$p = \Omega/n$ | same as   | 23, 27                 |
|   | Seismic response                      | $p = P_f, P_b$                  | Forced-displacement   | 28, 29                 |
| Self-excited vibration                              | Internal damping                      | $p = P_f$                       | Friction of assembly rotor<br>Friction of coupling                | 30, 31                 |
|   | Oil whip                              | $p = P_f$                       | Fluid film force  | 32, 33                 |
|   | Steam whirl                           | $p = P_f$                       | Tip clearance fluid leakage                                       | 34, 35                 |
|   | Seal-instability                      | $p = P_f$                       | Seal fluid force  | 36, 37, 38             |
| Forced & self-excited vibration                     | Unbalance & internal damping coupling | $p = \Omega$<br>$p = P_f$       | Interaction of &  | 39                     |
|   | Unbalance & oil whip coupling         | $p = \Omega$<br>$p = P_b$       | Interaction of &  | 40, 41, 42             |
| Chaos   | Chaos                                 | -                               | Bearing clearance (Strong nonlinearity)<br>Rubbing friction       | 43, 44, 45             |

危険速度における共振曲線が高速側あるいは低速側に倒れ込む。筆者らはFig. 6のロータ・空気軸受系で軸受部が漸硬型の非線形ばね特性をもつ場合に、共振曲線が高速側に倒れ込み危険速度が容易に通過できなくなることを実験と解析により解明した<sup>60)</sup>。

Fig. 6のロータ・空気軸受系を例にして、調和バランス法による定常・強制振動の計算法を示す。この問題では、曲げ変形の生じない剛性ロータが重心の並進による円筒モードで振れ回ると仮定した。軸受のばね特性は3乗の非線形項を含むFig. 6 (b)の漸硬型なので、ロータ重心  $(x, y)$  に関する運動方程式は次式ようになる。

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + \beta x^3 &= m\omega^2 \cos \omega t \\ m\ddot{y} + c\dot{y} + ky + \beta y^3 &= m\omega^2 \sin \omega t \end{aligned} \quad (3)$$

定常振動解を円軌道の振れ回り式(4)とおく。

$$\begin{aligned} x &= R \cos(\omega t - \delta) \\ y &= R \sin(\omega t - \delta) \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 $c$ と $\beta$ および $R$ 、 $\delta$ の微分量を微小として式(4)を式(3)に代入し、 $\omega$ の調和成分について両辺のバランスをとると、次の釣り合い式が得られる。

$$\begin{cases} kR - m(\omega^2 - 2\omega\dot{\delta})R + c\dot{R} + \frac{3}{4}\beta R^3 \end{cases} = m\omega^2 \cos \delta$$

$$2m\omega\dot{R} + cR(\omega - \dot{\delta}) = m\omega^2 \sin \delta \quad (5)$$

式(5)では三次以上の微小量を省略している。式(5)で $R$ と $\delta$ の微分項を0にして、 $R$ と $\delta$ の連立方程式を解けば定常解(4)が求まる。次に、定常解からわずかにずれた場合の収束・発散性を調べて、定常解の安定判別をする。次式のように、振幅 $R$ と位相 $\delta$ が、定常解 $R_0$ と $\delta_0$ から微小量 $\xi$ と $\eta$ だけ変

Table 2 Analysis method of non-linear vibration.

| Category                         | Analysis method                             | Character  | Reference        |
|----------------------------------|---|--|------------------|
| Steady-state<br>forced vibration | Harmonic balance                            | Useful for harmonic & sub-harmonic                                       | 46               |
|                                  | Equivalent linearization                    | Easy procedure<br>Not applicable for strong nonlinear system             | 18               |
|                                  | Component mode synthesis + harmonic balance | Useful for large DOF model<br>Not applicable for strong nonlinear system | 47, 48           |
| Transient vibration              | Direct integration                          | Easy procedure<br>Not applicable for large DOF model                     | 49, 50, 51       |
|                                  | Modal integration                           | Useful for large DOF model<br>Not applicable for strong nonlinear system | 52, 53           |
|                                  | Quasi-modal integration                     | Useful for large DOF model<br>Applicable for strong nonlinear system     | 54               |
|                                  | Incremental transfer matrix                 | Useful for large DOF model<br>Applicable for strong nonlinear system     | 55, 56           |
| Self-excited vibration           | Stability evaluation (linear analysis)      | Analysis of threshold speed  | 4, 32            |
|                                  | Complex eigenvalue (linear analysis)        | Analysis of threshold speed & instability                                | 57               |
| Forced & self-excited vibration  | Harmonic balance                            | Analysis of periodic steady-state vibration                              | 39               |
|                                  | Direct integration                          | Calculation of phase diagram   | 40               |
|                                  | Bifurcation theory                          | Analysis of limit cycle<br>( Hopf bifurcation theory )                   | 39<br>41, 42     |
| Chaos                            | Center manifold theory                      | Analysis of neighborhood around bifurcation                              | 40, 41<br>58, 59 |

化した場合を考える。

$$\begin{aligned} R &= R_0 + \xi \\ \delta &= \delta_0 + \eta \end{aligned} \tag{6}$$

式(6)を式(5)に代入して、 $\xi$ と $\eta$ の微分方程式を導くと以下ようになる。

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= a\xi + b\eta \\ \dot{\eta} &= c\xi + d\eta \end{aligned} \tag{7}$$

$a, b, c, d$ は、運動方程式(3)のパラメータと $R_0, \delta_0$ を含む定数となる。式(7)の解を、 $\xi = \xi_0 e^{st}, \eta = \eta_0 e^{st}$ と仮定して、ラウス・フルビッツの方法により、解の安定度を調べる。Fig. 7 (c)の共振曲線は以上のような手法で計算した。図中の実線は安定解、破線は不安定解を示す。なお、実験では、回転数を上げていくと安定解にそって振幅が増加し、危険速度が越えられないことを確認している<sup>60)</sup>。

以上のように、調和バランス法は簡便で精度も良いので、自由度の小さい場合の調和振動や分次調和振動の解析によく使われる。

#### 4.2 部分構造合成法を応用した解析法

自由度が大きな対象では、式(5)の連立非線形方程式の次数が大きくなるので、数値計算で解を求めるのに膨大な時間がかかる。ここでは、大自由度系を必要な自由度まで縮約して計算効率を上げるための部分構造合成法について示す。

本手法を提案した小林らは、実際の機械を模擬したFig. 3のモデルで、軸受ダンパの非線形性を考慮した調和振動や高調和振動を計算し、ダンパが適用できるアンバランス限界について解析を行っている<sup>61)</sup>。

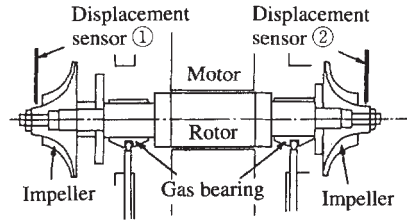
ここでは、Fig. 3の多軸受多円板軸系について自由度を縮退する。簡単のため、非線形要素は幾つかある軸受の一部だけに存在すると仮定する。回転体をFig. 7のように $N$ 個の要素に分割し、各節点で変位と傾き角からなる状態ベクトル $X_j$  ( $j = 0, 1, 2, \dots, n$ )を定める。このとき $M$ 個の軸受位置は必ず節点になるようにする。

求めたい全節点の状態ベクトルを $\{X\}$ 、全軸受の反力ベクトルを $\{F\}$ 、軸受のないフリーフリー状態での全節点の不釣り合い応答ベクトルを $\{W\}$ とする。伝達関数行列 $[A]$ を用いると、 $\{X\}$ は次式で表される。

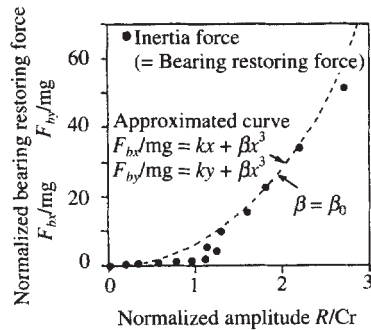
$$\begin{aligned} \{X\}_k &= [A]_k \{F\}_k + \{W\}_k \\ \{X\}_k &= \{X_1, X_2, \dots, X_N\}_k^T \end{aligned} \tag{8}$$

$k$ は着目する周波数成分の番号とする。伝達関数マトリックス $[A]$ や不釣り合い応答ベクトル $\{W\}$ は、伝達マトリックス法による線形解析で求められる。

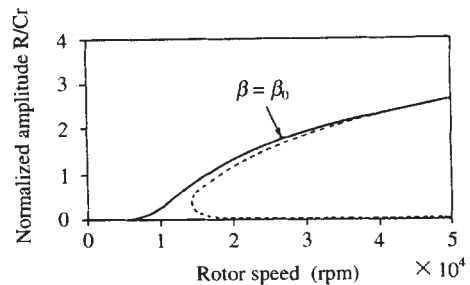
次に部分構造合成法を適用して、非線形軸受だ



(a) Compressor rotor supported air bearing



(b) Non-Linear spring characteristics of bearing



(c) Resonance curve of unbalance response

Fig. 6 Non-linear vibration on compressor rotor.

けに関する釣り合い式を導く。状態ベクトル $\{X\}$ と軸受反力ベクトル $\{F\}$ を、線形軸受と非線形軸受の節点に分けて（軸受以外は線形軸受の方に含める）、式(8)を以下のように書き直す。

$$\begin{Bmatrix} \{X_L\} \\ \{X_N\} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} A_{LL} & A_{LN} \\ A_{NL} & A_{NN} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \{F_L\} \\ \{F_N\} \end{Bmatrix}_k + \begin{Bmatrix} \{W_L\} \\ \{W_N\} \end{Bmatrix}_k \quad (9)$$

添字 $L$ は線形軸受、 $N$ は非線形軸受を示す。線形軸受に関しては動剛性を $[Q_L]$ とすると次式が成立する。

$$\{F_L\}_k = [Q_L]_k \{X_L\}_k \quad (10)$$

式(10)を式(9)に代入して線形部分の状態ベクトル $\{X_L\}$ を消去すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \{X_N\}_k &= [B_N]_k \{F_N\}_k + \{V_N\}_k \\ [B_N]_k &= [-A_{NL}Q_L B_L + A_{NN}]_k \\ \{V_N\}_k &= -[A_{NL}Q_L]_k \{V_L\}_k + \{W_N\}_k \end{aligned} \quad (11)$$

式(11)が非線形軸受の節点だけに縮約された釣り合い式となる。式(11)の $[B_N]$ 、 $\{V_N\}$ は線形解析の結果から求められるので、非線形軸受の状態ベクトル $\{X_N\}$ と反力 $\{F_N\}$ が未知数となる。一般に、 $\{X_N\}$ と $\{F_N\}$ は、非線形関数 $Q_N$ を用いて、各周波数毎に以下のように関係づけられる。

$$\begin{aligned} F_{mk} &= Q_{Nmk}(X_{m1}, X_{m2}, \dots, X_{mk}, \dots) \\ m &= 1, 2, \dots, M \end{aligned} \quad (12)$$

$m$ は便宜的につけた非線形軸受の番号である。

通常は、式(11)と式(12)にニュートン・ラフソン法を適用して、繰り返し計算により各周波数の状態ベクトル $\{X_N\}$ と反力 $\{F_N\}$ を求める。

非線形軸受の数は全節点数に比べてかなり小さく、考慮する周波数成分も数個であることから、式(12)の次元数はせいぜい数十個となる。中クラ

スのワークステーション（数FLOPS程度）を使っても繰り返し計算は数分で終わり、設計評価には十分使える。

## 5. 擬似モード法による非定常振動の解析法

回転体の非定常振動は、ブレード破損などで瞬間的に大きな強制力が加わった場合の過渡現象である。

そのため、非定常振動の解析では、運動方程式(3)の右辺にインパルス的な強制力を加え、その式をある時間間隔毎に逐次積分して時刻歴応答を計算することになる。逐次積分法には、Runge-Kutta法、Newmark- $\beta$ 法などがある<sup>49)</sup>。逐次積分法による時刻歴応答計算は膨大な繰り返し計算を伴うので、最新のワークステーション（数十FLOPS程度）を使っても実際に対応できるのは10自由度くらいまでで、Fig. 3のような多軸受多円板軸系では運動方程式をそのまま逐次積分することは現実的でない。そのため大自由度系では、モード法などを利用して自由度を減らす。モード法は幾つか提案されているが、回転体には、次に示す擬似モード法<sup>54)</sup>が最も有効と考えられる。

Fig. 8に擬似モード法の概念を示す。擬似モード法は拘束モード法<sup>62)</sup>を改良した手法であり、境界点を拘束した時の固有モードと境界点を動かした場合の変形モードを使って運動方程式を縮約する。

回転体を幾つかの要素に分割し、各節点の変位ベクトルを $\{z\}$ とする。運動方程式は、質量マトリックス $[M]$ 、ジャイロマトリックス $[C_g]$ 、剛性マトリックス $[K]$ 、減衰マトリックス $[C]$ 、加振力

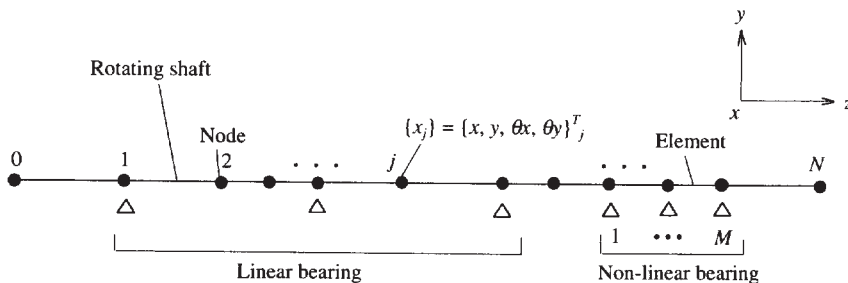


Fig. 7 Division of element by substructure mode synthesis.



ベクトル $\{F\}$ を用いて、次式で表現できる。

$$[M]\{\ddot{z}\} + i\omega[C_g]\{\dot{z}\} + [K]\{z\} + [C]\{\dot{z}\} = \{F\} \dots (13)$$

簡単のため、軸の左端を固定端とし、一番右の軸受のみ非線形軸受としその節点を境界点とする。境界点以外の内部座標点の変位ベクトルを $\{z_1\}$ 、境界点の変位を $z_2$ で表し、式(15)を次のように分解する。

$$\begin{bmatrix} M_1 & \\ & M_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \end{Bmatrix} + i\omega \begin{bmatrix} C_{g1} & \\ & C_{g2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 & \\ & C_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ Q_2(z_2, \dot{z}_2, t) \end{Bmatrix} \quad (14)$$

ここで、 $Q_2$ は非線形軸受の軸受反力を表す。

式(14)をモーダル縮退するため、まず、Fig. 8 (b)のように境界点を拘束したときの $\{z_1\}$ の固有モード $\{\phi\}$ を求める。固有モード $\{\phi\}$ は式(14)の外力項を0とした場合の自由振動解である。次に、Fig. 8 (c)のように、境界点を単位だけ静的に強制変位させた場合の $\{z_1\}$ の強制変位モード $\{\delta\}$ を求める。これは、式(14)で加速度項や速度項を無視した式から求めることができる。拘束モード法の場合は、以上の固有モード $\{\phi\}$ と強制変位モード $\{\delta\}$ だけでモーダル縮退する。回転体の場合は、ジャイロ項や軸受動特性のように速度の影響が無視できないので、Fig. 8 (d)のように境界点を単位速度で動かした場合の $\{z_1\}$ の強制速度モード $\{\xi\}$ も導入する。これは、式(14)で加速度項を省いた式から求めることができる。以上のようにして求めた固有モード $\{\phi\}$ 、強制変位モード $\{\delta\}$ 、強制速度モード $\{\xi\}$ を使い、状態ベクトル $\{z\}$ について次の座標変換を行う。

$$\begin{Bmatrix} \dot{z} \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\phi\lambda] & \delta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ [\phi] & \xi & \delta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_1 \\ s_{2v} \\ s_{2d} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

$$\{s\} = \begin{Bmatrix} s_1 \\ s_{2v} \\ s_{2d} \end{Bmatrix}$$

ここで $s_1$ は内部座標のモード座標、 $s_{2v}$ と $s_{2d}$ は境界点の速度と変位を表す物理座標である。

運動方程式(14)を次式のように状態方程式に変形して、式(15)の座標変換を行うと次式が導かれる。

$$\begin{bmatrix} -M & \\ & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{z} \\ z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} i\omega C_g + C & K \\ K & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{z} \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (16)$$

$$[B]\{\dot{s}\} = [A]\{s\} - \{Fs\} \quad (17)$$

式(17)の $[B]$ や $[A]$ は完全な対角マトリクスではないが、非対角成分のほとんどが0となるので、後の計算に有利となる。不釣り合い力や非線形軸受の反力は $\{Fs\}$ に含まれる。式(17)をRunge-Kutta法などで逐次積分することで時刻歴応答が計算できる。

以上のように擬似モード法は、拘束モード法の概念を使って振動解析を低次元の問題に移している。また、境界点の変位や速度に依存するモード変化も考慮しているので、ジャイロモーメントが影響する回転体の非線形問題を扱う場合は拘束モード法より精度が良い。

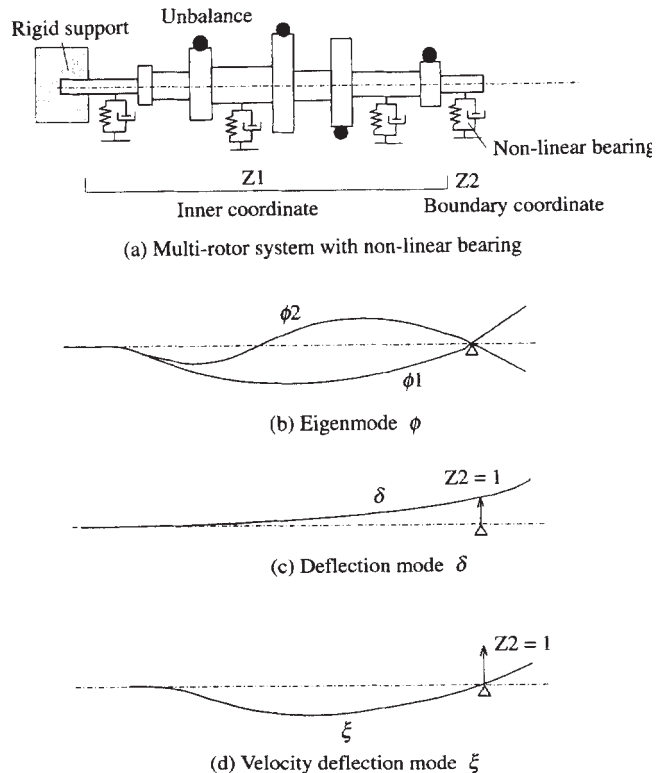


Fig. 8 Concept of quasi-modal analysis.

6. 強制・自励系の非線形振動

6.1 強制・自励系振動の特徴

不釣り合い強制振動とオイルホイップなどの自励振動が連成する強制・自励系の特徴を示す。Fig. 9 に自励系の位相軌道を示す<sup>5,8)</sup>。Fig. 9 (a)のように安定時にはどのような状態からも平衡点に収束する。振動系が動的不安定となって自励振動が発生すると、Fig. 9 (b)に示すようにリミットサイクルと呼ばれる安定した振れ回り軌道に落ち着く。このように自励系では、位相図の大きな変化は自励振動の発生前後だけに現れる。それに対して、強制・自励系では、強制振動が自励振動の位相軌道に影響を及ぼすので、位相軌道の変化が複雑になる。Fig. 10に、不釣り合い振動とオイルホイップが相互作用を及ぼす場合の位相図の変化を示す<sup>4,9)</sup>。この図は回転数と不釣り合いの大きさに対する位相図の変化を示している。系のパラメータによって位相図の様相が大きく変化することを分岐と呼ぶ。Fig. 10に示すように、強制・自励系ではパラ

メータに対して種々の分岐が起こるため、不釣り合い振動が支配的な領域とオイルホイップによるリミットサイクルが発生する領域が複雑に交錯する。振動を抑えるためには、このような分岐特性を把握し、振動が小さくかつ安定度のある領域で機械を設計しなければならない。しかし、実際の機械では、パラメータの数が多いため分岐現象は更に複雑になり、その解析は非常に難しくなると思われる。

6.2 強制・自励系振動の解析法

強制・自励系の解析では、Fig. 10に示したような分岐線図を精度良く求めることが重要である。現在のところ、分岐線図の解析には大きく分けて2つ手法がある (Table 2を参照)。

一つは逐次積分法を用いた数値シミュレーションを中心とする方法である<sup>4,2)</sup>。すべり軸受で支持されたロータを例にとって、不釣り合い振動とオイルホイップの連成振動を計算する方法を示す。Fig. 11 (a)に示すように、すべり軸受の中をロー

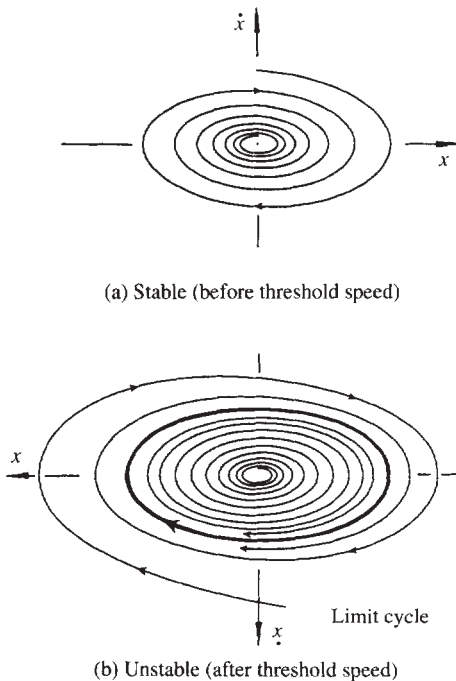


Fig. 9 Phase diagram of self-executed system.

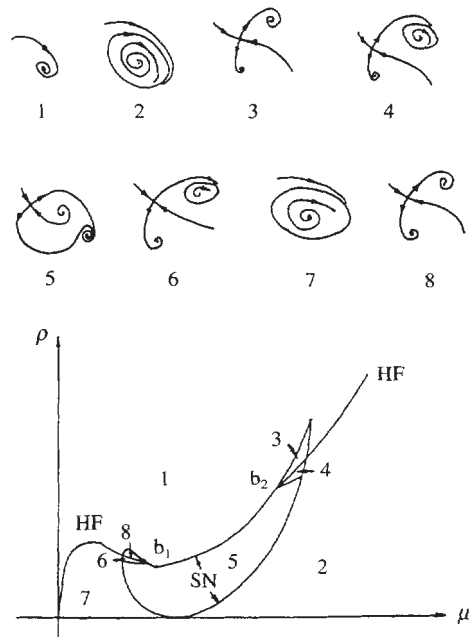


Fig. 10 Bifurcation diagram of unbalance and oil whip coupled vibration<sup>4,9)</sup>.

( $\rho$ : unbalance,  $\mu$ :  $\omega - \omega_n$ ,  $\omega$ : rotor speed,  $\omega_n$ : oil whip threshold speed)

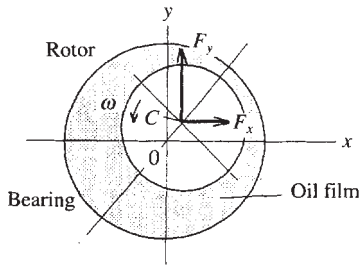
タが回転する場合には、油膜のくさび膜効果によって圧力が発生し、その油膜圧力の合力がx, y方向の軸受反力 $F_x, F_y$ となる。軸受反力 $F_x, F_y$ は、レイノルズ方程式に支配され、ロータの変位、速度、回転数の非線形関数となる。ロータの振り回りに関する運動方程式は次式のように表される<sup>40)</sup>。

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(x, y, \dot{x}, \dot{y}, \omega) + me\omega \cos \omega t \\ m\ddot{y} &= F_y(x, y, \dot{x}, \dot{y}, \omega) + me\omega^2 \sin \omega t + F_0 \end{aligned} \quad (18)$$

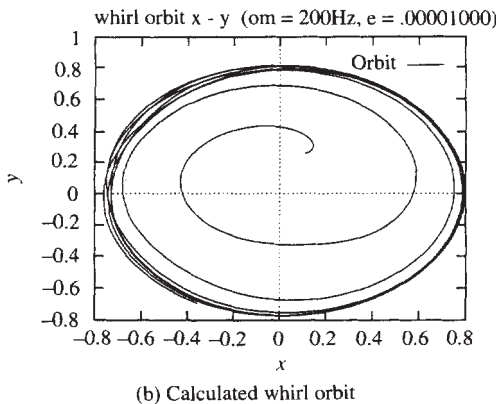
$me$ は不釣合い、 $F_0$ とはロータの自重を表す。ここで、 $\{z\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}^T = \{x, \dot{x}, y, \dot{y}\}^T$ で表される状態ベクトルを導入し、適当な無次元化を行うと式(18)は次式のように整理される。

$$\{\dot{z}\} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F_x \\ 0 \\ F_y \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t) \\ 0 \\ \sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

$\rho$ は不釣合いを表す無次元量である。 $\{z\}$ の初期値を決めて、式(19)をRunge-Kutta法やNewmark- $\beta$ 法などで逐次積分すれば、Fig. 11 (b)のような振り



(a) Rotor-journal bearing system



(b) Calculated whirl orbit

Fig. 11 Analysis of unbalance and oil whip vibration.

回り軌道が得られる。初期値を変えてこのような計算を行えば、Fig. 9に示した位相図が求められる。分岐線図を求めるには、不釣合い $\rho$ や回転数 $\omega$ を変えて位相図を求めればよい。

このように、数値シミュレーションによる手法は簡便であるが、初期値やパラメータを変えて計算を繰り返す必要があるので非常に手間がかかる。また、この手法だけでは分岐点を正確に定めることが不可能で、分岐点付近の込み入った現象は解析することができない。そこで、通常は、予め調和バランス法を用いて不釣合い振動の定常解の安定性を求めたり<sup>39)</sup>、分岐理論によって自励振動の発生領域を計算する<sup>41, 42)</sup>。これによって分岐点がおおまかに把握でき、数値シミュレーションの回数を減らすことができる。

二つ目は、位相幾何学の中心多様体理論を用いた手法である。数値シミュレーションでは解明できない分岐点近傍の位相図の変化を効率良く求めることができるのが利点である。式(19)に示した強制・自励系を例として、中心多様体論を使う場合の概略を以下に示す。中心多様体論は、多次元の問題を狙った現象の本質を変えずに低次元の問題に移す定理で、目的はモード法などの自由度縮約と似ている。

まず、自励振動のオイルホイップが発生する分岐点を求めるため、式(19)において軸受反力の項を平衡点の近傍でテーラ展開し、次式のように整理する。

$$\{\dot{z}\} = [A(\omega)]\{z\} + \begin{pmatrix} 0 \\ f_1(z, \omega) \\ 0 \\ f_2(z, \omega) \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t) \\ 0 \\ \sin(t) \end{pmatrix} \quad (20)$$

式(20)のマトリックス $[A(\omega)]$ の固有値が系の安定度を示す。固有値の実部が負から正に変わるときの $\omega_0$ がオイルホイップが発生する回転数となる。この分岐点近傍の現象を見るため、 $\omega$ を微量 $\mu$ を使って $\omega = \omega_0 + \mu$ と表し、式(20)を $\omega$ について摂動させると次式を得る。

$$\begin{aligned} \{\dot{z}\} &= [A(\omega_0)]\{z\} + \mu[A_1^*]\{z\} + \begin{pmatrix} 0 \\ f_1(z, \omega_0) \\ 0 \\ f_2(z, \omega_0) \end{pmatrix} \\ &+ \mu \begin{pmatrix} 0 \\ f_1^* \\ 0 \\ f_2^* \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t) \\ 0 \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (21)$$

式(21)を解けば分岐点近傍の位相図が求まるが、このままでは4次の1階非線形微分方程式なので逐次積分法による数値シミュレーションを必要とする。そこで、中心多様体 $h_1, h_2$ を使って次数を低減する。

$$\begin{aligned}x_3 &= h_1(t, \mu, \rho, x_1, x_2) \\x_4 &= h_2(t, \mu, \rho, x_1, x_2)\end{aligned}\quad (22)$$

式(22)と中心多様体定理を使って式(21)から、 $x_3, x_4$ を消去すると、最終的に $x_1, x_2$ に関する次式を得る。

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \dot{\bar{z}} \\ \bar{z} \end{pmatrix} &= [B_1(\mu)] \begin{pmatrix} \bar{z} \\ \dot{\bar{z}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{f} \\ \dot{\bar{f}} \end{pmatrix} + \rho B_2 \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \bar{z} \\ \dot{\bar{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (23)$$

式(23)は2次の1階微分方程式なので、位相平面法を使えば、数値シミュレーションを使わなくても簡単に位相図を求めることができる。よって、式(23)で回転数 $\mu$ と不釣合い $\rho$ を変えて、位相図を求めれば分岐点近傍の位相図の変化を詳細に把握することができる。Fig. 10は、この中心多様体理論を応用して求められた分岐線図である。中心多様体論はカオスなどの非線形力学の分野でよく利用されているが、回転体の非線形振動解析に使われた例はまだ少ない。しかし、前述した調和バランス法や分岐理論と併用すれば強制・自励系の分岐特性を分岐点近傍の複雑な部分まで解明できることがわかってきているので、今後、回転体の分野での発展も進むものと思われる。

以上述べた解析法は基本的には低自由度の問題しか扱えない。したがって、実際の機械の大自由度系を扱う場合には、前章までに取り上げた部分構造合成法や擬似モード法の応用が必要となる。これらを用いた強制・自励系の解析法はまだ研究されていない。今後は、従来の部分構造合成法や擬似モード法をいかにして中心多様体理論などと融合させていくかが研究の課題と思われる。

## 7. おわりに

本稿では解析面に絞って回転体の非線形振動問題に関する技術動向を解説した。定常・強制振動や非定常振動については、実用的な解析手法が開発されている。特に、部分構造合成法による定常振動の解析法や、擬似モード法による非定常振動

の計算法は実機的设计評価に有効である。

小型ターボ機械で問題となる強制・自励系振動については、最近着目され始めたばかりで分岐現象などの非線形挙動はほとんど解明されていない。解析法としては数値シミュレーションや中心多様体論による手法がある。今後は、計算効率と精度の面から中心多様体論による手法が発展していくと思われる。しかし、実機的设计に使える大自由度系の解析法は確立されておらず、部分構造合成法や擬似モード法をこの分野にも適用して実用的な解析法を開発していく必要があると考えられる。

## 参考文献

- 1) 日本機械学会振動工学研究会：V\_BASEデータブック"機械の振動問題と対策実例"
- 2) 稲垣瑞穂, 青山隆之, 吉川和男, 他：自動車技術会論文集, 25-1(1994), 51
- 3) Tondl：回転軸の力学, 前沢成一郎訳, コロナ社
- 4) Gasch：回転体の力学, 三輪修三訳, (1978), 198, 森北出版
- 5) 白木万博, 稲垣泰一：三菱重工技報, 20-3(1983), 270
- 6) 菊池勝昭：日本機械学会誌, 72-60(1969), 1556
- 7) 古池治孝：機械の研究, 40-6(1988), 671
- 8) 藤沢二三夫：機械の研究, 39-5(1987), 583
- 9) Choy, F. K., Padovan, J. and Batur, C. : Trans. ASME J. Eng. GT Power, 111-4(1989), 652
- 10) 石田幸男：機械の研究, 45-4(1993), 436
- 11) 斎藤忍：講習会資料"ロータダイナミクスの先端技術", 日本機械学会, (1991)
- 12) Hashemi, Y. : IMechE 1984 C271/84
- 13) Ehrich, F. F. : ASME Paper 66-MD-1, (1966)
- 14) Ehrich, F. F. : Trans. ASME, J. Vib. Acous. Str. and Rel. in Design, 110-1(1988), 9
- 15) Kim, Y. B. and Noah, S. T. : Nonlinear Dynamics No.1, (1990), 221
- 16) El-Shafei, A. : Trans. ASME J. Eng. Gas Turbines Power 115-2(1993), 353
- 17) Taylor, D. L. and Kumar, B. R. K. : ASME Pap. 82-GT-263, 6p
- 18) Guang, M. : Machine Vibration No.1, (1992), 29
- 19) Nataraji, C. and Ashrafiun, H., : Trans ASME J. Vib. Acous., 115-2(1993), 210
- 20) 石田幸男, 山本敏男：日本機械学会論文集C, 57-538(1991), 1791
- 21) 稲垣泰一：機械学会論文集C, 56-523(1990), 582
- 22) Geradin, M. and Kill, N., : IMechE 1988 C283/88
- 23) 矢鍋重夫, 金子寛, ほか：日本機械学会D&D講演論文集 Vol.A(1992), 207
- 24) Isaksson, J. L. : IFToMM 4th Int. Conf. on Rotor Dynamics Proc., (1994), 85

- 25) Zhang, S., Yan, L. and Li, Q. : Trans. ASME J. Vib. Acous. 114-3(1992), 347
- 26) 小林正生, 山内進吾, ほか : 日本機械学会論文集C, 59-557(1993), 85
- 27) 石田幸男, 池田隆, 山本敏男 : 日本機械学会論文集C, 55-511(1989), 636
- 28) 松下修巳, 高木亨之, 菊池勝昭 : 日本機械学会論文集C, 49-442(1983), 971
- 29) 堀幸夫, 加藤孝久 : 機械学会論文集C, 55-511(1989), 611
- 30) Childs, D. W. : Trans. ASME J. Eng. Power, 100-1(1978), 48
- 31) Scwibinger, P. and Nordmann, R. : Trans. ASME J. Eng. GT Power, 110-4(1988), 563
- 32) 日本機械学会編, すべり軸受の静特性および動特性解析, (1984), 297, 日本工業出版
- 33) Rao, J. S. : Trans. ASME J. Vib. Acous. Str. Rel., 105-3 (1983), 274
- 34) Ehrich, F. : Trans. ASME J. Vib. Acous. 115-4(1993), 509
- 35) Wang, J. H. and Tsai, M. T. : ASME J. Eng. GT Power, 110-2(1988), 274
- 36) Scharrer, J. K. : ASME J. Tribology, 115-3(1993), 336
- 37) Wilkes, K. W., Kirk, R. G. and Elrod, D. A. : STLE, Tribology Trans., (1993)
- 38) Childs, D. : IFToMM 4th Int. Conf. on Rotor Dynamics Proc., (1994), 153
- 39) Shaw, J. and Shaw, S. W. : J. Sound and Vibration, 147-3(1991), 435
- 40) Shaw, J. and Shaw, S. W. : Nonlinear Dynamics No.1, (1990), 293
- 41) Myers, C. J. : Trans. ASME J. Appl. Mech., 51-2(1984), 244
- 42) Hollis, P. and Taylor, D. L. : Trans. ASME J. Tribology, 51(1984), 244
- 43) Ehrich, F. F. : Trans. ASME J. Vib. Acoust., 113-1(1991), 50
- 44) Goldman, P. and Muszynska, A. : ASME Pap. 93-GT-387
- 45) Adams, M. L. and Abu-Mahfouz, I. A. : IFToMM 4th Int. Conf. on Rotor Dynamics Proc., (1994), 29
- 46) Lau, S. L. and Yuen, S. W. : J. Sound and Vibration, 167(1993), 303
- 47) Nataraji, C. and Nelson, H. D. : Trans. ASME J. Vib. Acous. Str. Rel., 111-2(1989), 187
- 48) 小林正生, 斎藤忍, 山内進吾 : 日本機械学会論文集C, 57-533 (1991), 1
- 49) 戸川隼人 : 有限要素法による振動解析, サイエンス社
- 50) Subbiah, R. and Rieger, N. F. : Trans. ASME J. Vib. Acous. Str. Rel., 110-4(1988), 515
- 51) Ratan, S. and Rodriguez, J. : Trans. ASME, J. Vib. Acoust., 114(1992), 477
- 52) Kirk, R. G. and Hibner, D. H. : Trans. ASME, J. Eng. for Ind., 98-2(1976), 497
- 53) Nelson, H. D. and Meacham, W. L. : ASME Paper, 81-DET-110, (1981)
- 54) 松下修巳, 高木亨之, 高橋陸郎 : 日本機械学会論文集C, 48-431(1982), 925
- 55) 平見尚隆, 平野勝巳, 山川宏 : 日本機械学会論文集C, 52-484 (1986), 3168
- 56) 山川宏, 大西哲也 : 日本機械学会論文集C, 48-429(1982), 672
- 57) 日本機械学会編, 振動工学におけるコンピュータアナリシス, (1987), 159, コロナ社
- 58) Thompson, J. M. T. and Stewart, H. B. : 非線形力学とカオス, 武者利光監修, 橋口住久訳, (1988), 108, オーム社
- 59) Wiggins, S. : 非線形系の力学系とカオス, 丹羽敏雄訳, (1992), 243, シュプリンガー・フェアラーク東京
- 60) 稲垣瑞穂, 吉川和男, 三田英夫 : 日本機械学会1992秋季全国大会講演前刷集, 920-78(1992), 58
- 61) 小林正生, 日本機械学会論文集C, 58-552(1992), 2438
- 62) 長松昭夫 : モード解析, (1985), 189, 培風館

## 著者紹介



稲垣瑞穂 Mizuho Inagaki

生年 : 1964年。

所属 : 構造・振動研究室。

分野 : エンジン・ターボ機械の振動・騒音の研究。

学会等 : 日本機械学会, 自動車技術会会員。