研究報告

離散化要素に基づいた構造最適化

西脇眞二

Structural Optimization Based on Discrete Elements

Shinji Nishiwaki

要　旨

Computer Aided Engineering (CAE) は，自動車産業に代表される機械産業において必要不可欠なものとなっている。そして，高精度化を目指したCAEの発展により，試作なしでも機械性能をある程度定量的に評価可能になりつつある。このような数値実験の代替手法としてのCAEを，そのまま実際の設計現場に持ち込むことはほぼ不可能に近い。近年，設計者自らが利用できる新たなCAEとして，First Order Analysis (FOA) が提案されている。本研究では，FOA開発の一環として，構造の理解が容易な梁要素とパネル要素を用いたトポロジー最適設計法を開発する。すなわち最初に，設計者の利用を前提とした最適設計の考え方をProduct Oriented Analysis (POA) の概念のもとに概説する。次に，相互エネルギの考え方に基づき，着力点と評価点の異なる場合の剛性である相互剛性の評価尺度を設定する。そして，その評価尺度を用いて，マルチローディングの考え方をもとに，梁要素の断面積を設計変数とした場合の最適設計問題を定式化する。さらに，その最適化問題を具体的に解く方法として，グランドストラクチャ法と逐次凸関数近似法を用いたトポロジー最適化アルゴリズムを構築する。最後に，簡単な数値例により，本手法の妥当性を検証する。

キーワード　Computer Aided Engineering (CAE)，最適設計，トポロジー最適化，構造解析，凸関数近似法

Abstract

Computer Aided Engineering (CAE) has been successfully utilized in mechanical industries. CAE numerically estimates the mechanical performance and proposes alternative ideas that lead to higher performance without building prototypes. Most CAE tools, however, are not utilized due to the sophisticated operations. The concept of First Order Analysis (FOA) has been proposed to provide a new type of CAE for design engineers. In this report, we present a topology optimization method using discrete elements. The basic ideas involve a concept of Product Oriented Analysis (POA) that allows design engineers to easily deal with the optimization scheme. First, the mutual stiffness is defined based on a mutual energy concept. Next, a multi-objective optimization problem to deal with the multiple loading problem is formulated, and the optimization procedure is developed based on the ground structure approach and sequential convex programming. Finally, some examples are provided to confirm the availability of the proposed method.

Keywords　Computer Aided Engineering (CAE), Optimum design, Topology optimization, Structural analysis, Convex programming

特集

1．はじめに

コンピュータの急速な発達に伴い，CAE (Computer Aided Engineering)[1]に代表されるDE (Digital Engineering) 技術は，機械産業に大きな変革をもたらしている。DEは企画・設計過程から製造過程に至るあらゆる開発過程において，新しい技術の枠組みを提供しつつある。例えば，評価段階においては高精度化を目指したCAEの発展により，試作なしでも機械性能を定量的に評価可能になりつつある。しかし，このような数値実験の代替手法としてのCAEをそのまま実際の設計現場に持ち込むことは難しく，設計現場の価値観や考え方に合致した新しいCAEが要望されている。このような要求に対して，新しいCAEであるファーストオーダーアナリシス (First Order Analysis) (以下，FOAと略す)[2]が提唱されている。FOAは設計者向けのCAEであることを前提に，専門知識なしにグラフィカルにボデー構造の基本性能と設計変数の関係をパソコン上で瞬時に定性評価し，改善する機能を持つものとする[2]。そして，このようなFOAの機能を実現するためには，設計者が容易に理解しやすく，またボデー構造を簡単に表現できる梁やパネル等の離散化構造要素を用いた解析と，構造の基本的な形態を決定可能なトポロジー最適化が必要不可欠な技術となる。これにより，基本設計段階で設計者自らが設計案の優劣を絞り込むことが可能となる。

ここでは，FOAによるCAE開発の一環として開発した離散化構造要素を用いたトポロジー最適設計法について報告する。すなわち，最初に設計者の利用を前提にした最適設計の方法について簡単に触れる。次に，機械構造物の基本性能に大きく関与する静的な剛性最大化を目標とした場合について，代表的な離散化要素である梁要素とパネル要素を用いた最適設計手法を説明する。最後に，幾つかの事例によりここで紹介した方法の有効性について述べる。

2．設計者の利用を前提にした最適設計の方法

一般的な構造設計の手順を考察すれば，最初に，設計対象について要求される性能とその性能を決定付ける設計要因を明確化し，それをもとに性能に大きく関与する基本要素の構成を決定することから始める。その設計要素の構成・配置が終了した後には，多少副次的であるが，ある程度性能に影響を与える部位の設計を行い，最終的に設計対象の詳細設計に至る。

このような設計手順をCAEの解析モデルの作成手順と比較すれば，それらが全く異なることが理解できる。すなわち設計段階では上述のように，設計者はまず設計対象を明確にする段階で，設計対象の性能を決定づける本質的な部位から設計を組み立てていくのに対して，CAEのモデル作成においては設計対象と性能の関連性を判断することなく，設計対象から抽象化されたメッシュモデルを作成しなければならない。このような相違は，通常のCAEが設計者にとって彼らの基本的な考え方と異なったものであると認識させてしまっているのが要因と考えられる。さらに現状のCAEから得られる解析結果についても，設計者には満足の行くものが得られないことが多い。なぜなら，現状のCAEは解析結果を定量的に評価できても解析結果が得られた理由，すなわち解析結果のメカニズムを提供することが難しいからである。

以上の2つの課題を解決するために，FOAにおける最適設計では以下の方策を提案する。まず解析モデルの作成には，**Fig. 1**に示したようにインターフェースを各設計対象に特化したものとする。解析モデルの作成はできるだけ設計手順に沿ったものとする。ここでは，このような考え方を書く設計対象 (Product) の設計手順に立脚していることから，Product Oriented Analysis (以下，POAと略す)[3]と呼ぶ。

さらに，解析結果のメカニズムを理解しやすいように，解析要素にはその機能が明確化されている梁・パネル要素を用いる。これらの要素は変分原理に基づいた連続体要素と異なり，力のつり合い状態と幾何学的変形状態を人間の理解可能な物理量を用いて解釈できる特長を持つ。また最適設計後には，その設計案の最適性のメカニズムを理解できるような順解析を行うことにする。

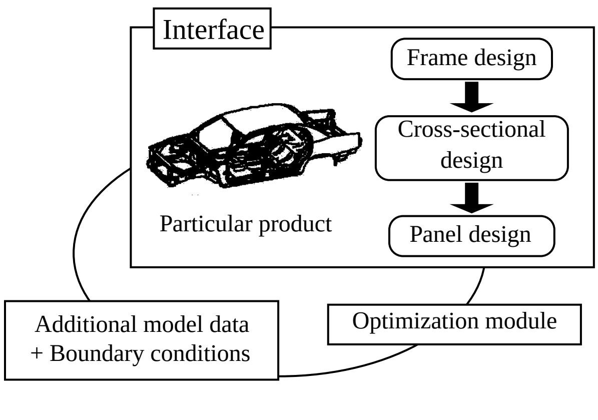


Fig. 1 Concept of product oriented analysis.

3．定式化とアルゴリズム

3．1　剛性の定式化

Fig. 2に示したように，n個の節点間を離散化された弾性構造要素で連結した構造物の静的な変形問題について考える。構造物の各節点は並進方向にx，y，zの3自由度，回転方向にθ_x，θ_y，θ_zの3自由度を持つものとする。そして，図に示した弾性構造物の境界を完全固定し，構造物内の2つの節点P_i，P_jには，異なる荷重を別々に作用させる。すなわち，Case(1)では節点P_iに荷重 $\boldsymbol{f}^1$を作用させ，Case(2)では節点P_jに荷重$\boldsymbol{f}^2$を作用させる。このときの構造物の変形場は，それぞれ$\boldsymbol{u}^1$，$\boldsymbol{u}^2$であるとする。ここで，$\boldsymbol{f}^1$，$\boldsymbol{u}^1$，$\boldsymbol{f}^2$，$\boldsymbol{u}^2$は次式で表される。

$$\boldsymbol{f}^1 = \{\, 0, 0, 0, \ldots, f^1_{xi}, f^1_{yi}, f^1_{zi}, f^1_{\theta xi}, f^1_{\theta yi}, f^1_{\theta zi}, \ldots, 0, 0, 0 \,\}^T \qquad \cdots(1)$$

$$\boldsymbol{u}^1 = \{\, u^1_{x1}, u^1_{y1}, u^1_{z1}, u^1_{\theta x1}, u^1_{\theta y1}, u^1_{\theta z1}, \ldots, u^1_{xn}, u^1_{yn}, u^1_{zn}, u^1_{\theta xn}, u^1_{\theta yn}, u^1_{\theta zn} \,\}^T \qquad \cdots(2)$$

$$\boldsymbol{f}^2 = \{\, 0, 0, 0, \ldots, f^2_{xj}, f^2_{yj}, f^2_{zi}, f^2_{\theta xj}, f^2_{\theta yj}, f^2_{\theta zj}, \ldots, 0, 0, 0 \,\}^T \qquad \cdots(3)$$

$$\boldsymbol{u}^2 = \{\, u^2_{x1}, u^2_{y1}, u^2_{z1}, u^2_{\theta x1}, u^2_{\theta y1}, u^2_{\theta z1}, \ldots, u^2_{xn}, u^2_{yn}, u^2_{zn}, u^2_{\theta xn}, u^2_{\theta xn}, u^2_{\theta yn}, u^2_{\theta zn} \,\}^T \qquad \cdots(4)$$

なお，ここでは簡略化のため構造物の1節点に荷重を与えた場合を考えているが，それぞれのケースについて複数の荷重を複数の節点に同時に作用させてもよいものとする。

ここで，Case(2)で作用させた荷重ベクトル$\boldsymbol{f}^2$を単位ベクトルとすれば，次式に示す相互平均コンプライアンス$l_{1,2}$が，節点P_iに荷重ベクトル$\boldsymbol{f}^1$を作用させた場合の節点P_jにおける剛性 (相互剛性) の尺度[4]となる。

$$l_{1,2} = \boldsymbol{f}^2 \cdot \boldsymbol{u}^1 = \boldsymbol{f}^{2T}\boldsymbol{u}^1 \qquad \cdots(5)$$

すなわち，この絶対値を最小化することにより，荷重ベクトル$\boldsymbol{f}^1$を作用させたときの節点P_jにおけるベクトル$\boldsymbol{f}^2$の方向の剛性は最大化できる。なおボデーの構造設計では，このような相互関係を持つ剛性を考慮する必要があることを注記しておく。このような相互剛性の考え方は，操安性の評価のように，荷重着力点と変形量の評価点が異なる場合について最適構造を探索する際に必要となると考える。またさらに，$\boldsymbol{f}^1$と$\boldsymbol{f}^2$が一致する場合，すなわち$l_{1,1}$はBendsøeとKikuchi[5] が導入した平均コンプライアンスに退化する。

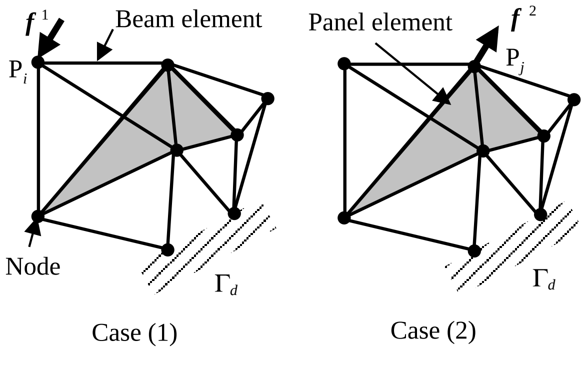


Fig. 2　Definition of mutual mean compliance.

3．2　設計領域および設計要素の設定

トポロジー最適化の考え方は，固定設計領域の設定とその固定設計領域に配置する構造要素の有無を判定する次式の特性関数に基づく。

$$\chi_\Omega(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \Omega_d \\ 0 & \text{if } x \in D \backslash \Omega_d \end{cases} \qquad \cdots(6)$$

ここで，Dは固定設計領域で，Ω_dは固定設計領域から最適化により選択させた最適構造を形成する領域，xは固定設計領域D内の位置座標である。この特性関数を用いることで，最適設計問題は材料分布問題，あるいは要素配置問題に置き換えることができる。ただ，この特性関数を用いると離散化された変数を取り扱わなければならず，計算上の取り扱いは困難になる。この問題を克服するため，ここでは密度法[6] 的な考え方に基づいた次式により，特性関数を連続関数に置き換える。

$$\chi_\Omega(x) \approx \rho_v^p \qquad \cdots(7)$$

ここで，ρ_vは正規化された密度で

$$0 \le \rho_v \le 1 \qquad \cdots(8)$$

なる値をとる。また，pはρ_vにペナルティを与えるパラメー タである。式(7)を用いれば，最適設計問題を固定設計領域D内における要素の連続的な分布問題に置き換えられる。

前述のように，本研究では構造物のモデル化に離散構造要素として梁要素とパネル要素を用いる。2つの離散化要素のうち，梁要素は6自由度の剛性を持っており構造物の基本的な特性を決定している。これに対して，パネル要素は面内力を評価するだけの付加的な影響しか与えない。そこで本研究では，構造物の基本的な骨格構造を決定することを第1目標として，設計対象には梁要素のみを取り扱い，パネル要素はパネルの面内力の影響のみを評価する非設計要素とする[7]。

Fig. 3 に示すように，梁要素の断面には円断面と楕円断面を考える。円断面の場合の設計変数は断面積Aであるが，楕円断面の場合には断面積Aと慣性主軸までの回転角度ϕが設計変数となる。ここでは

特集

最適設計の概略を説明するため，最も単純な場合である円断面の場合について説明する。楕円断面の場合については文献[8]を参照されたい。式(7)の関数を用いて梁要素の体積Vを表せば，

$$V = AL = \rho_v^{\,p} A_{\max} L \qquad (9)$$

となる。

他方，パネル要素については面内方向のつり合いが支配的であるので，設計段階の評価では面外方向のつり合いは無視できると考えられる。そこで，ここでは面内方向のつり合いのみを考慮し，応力仮定に基づいてパネル要素を定式化する。応力仮定では，応力sの補間関数と変位$\boldsymbol{u}$の補間関数を独立に定義できるので，パネルの支配的な応力をあらかじめ仮定できることと，変位法による要素より比較的精度の良い要素が作成できる特長を持つ。例えば，応力場$\boldsymbol{S}$をパネル要素に設定した要素座標系xyzに関して

$$\boldsymbol{S} = \begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}c_{11}+c_{12}y\\ c_{21}+c_{22}x\\ c_{31}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & y & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & x & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}c_{11}\\ c_{12}\\ c_{21}\\ c_{22}\\ c_{31}\end{Bmatrix} \qquad (10)$$

として，すべての面内応力を評価することもできるし，せん断応力のみを評価するために

$$\boldsymbol{S} = \begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\ 0\\ c_{31}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}c_{11}\\ c_{12}\\ c_{21}\\ c_{22}\\ c_{31}\end{Bmatrix} \qquad (11)$$

とすることもできる。なお，詳細は文献[9]を参照されたい。

３．３　最適化問題の定式化と最適化アルゴリズム

n本の梁で構成される固定設計領域Dのm箇所に荷重を別々に作用させたマルチローディング場合について剛性最大化を行う。すなわち，荷重ベクトル$\boldsymbol{f}^{1j}$ $(j=1,\ldots,m)$で表される荷重が作用するときに，単位荷重ベクトル$\boldsymbol{f}^{2,j}$ $(j=1,\ldots,m)$の方向の剛性を設計領域の体積制約のもとで最大化を図る。なお，境界を完全固定した2つの荷重ベクトルを作用させたときの設計領域の変位ベクトルをそれぞれ$\boldsymbol{u}^{1,j}$，$\boldsymbol{u}^{2,j}$ $(j=1,\ldots,m)$とし，2つの荷重で定義される相互平均コンプライアンスを$l_{1,2}^{\,j}$ $(j=1,\ldots,m)$とする。また，設計領域を構成する梁は円断面を持ち，正規化された密度と梁の長さをそれぞれ$\rho_{v,i}$，L_i $(i=1,\ldots,n)$とし，最大時の断面積は全ての梁について同一で$A_{\max}$とする。このとき最適化問題は以下のように定式化される。

$$\underset{\rho_{v,i}}{\text{minimize}}\ \left|l_{1,2}^{j}\right| = \left|f^{2,j\,T} u^{1,j}\right| = \left|u^{2,j\,T} K u^{1,j}\right| \quad \text{for } j=1,\ldots,m \qquad (12)$$

制約条件

$$V_\Omega = \sum_{i=1}^{n} \rho_{v,i}^{p} A_{\max} L_i \le V^U \qquad (13)$$

$$0 \le \rho_{v,i} \le 1 \quad \text{for } i=1,\ldots,n \qquad (14)$$

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}^{1,j} = \boldsymbol{f}^{1,j} \quad \text{for } j=1,\ldots,m \qquad (15)$$

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}^{2,j} = \boldsymbol{f}^{2,j} \quad \text{for } j=1,\ldots,m \qquad (16)$$

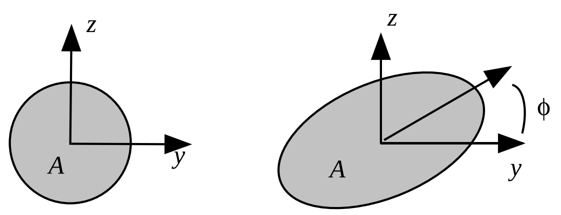
ここで，$\boldsymbol{K}$は設計領域全体の剛性マトリクス，V^Uは体積制約の上限値である。なお，$\boldsymbol{f}^{1,j}$と$\boldsymbol{f}^{2,j}$が同一である場合には式(12)の目標関数は平均コンプライアンスに退化し，絶対値をとる必要はなくなる。

上式のように，複数の目標関数を持つ最適化問題は多目的問題と呼ばれている。この問題を解くためにここでは，次式に示す目標関数を用いる。

$$f = \max_{j=1,\ldots,m} \left| l_{1,2}^{\,j} \right| \qquad (17)$$

上式を用いれば，相互平均コンプライアンスの絶対値が最大のものを最小化することになるので，剛性が一番低い場合について剛性が向上されることになる。したがって，結果的にすべての場合について平均的な剛性を持つ最適構造が得られることになる。

Fig. 4に最適化のフローチャートを示す。図の設計変数の更新には，逐次凸関数近似法であるCONLIN (Convex Linearization)[10]を用いている。この方法は剛性問題に関して，ヒューリステックスなしで高い収束性が得られる特長を持つ。



(a) Circular cross-section　(b) Elliptic cross-section

Fig. 3　Cross-sectional shape and design variables.

４．数値例

幾つかの最適設計例により，本研究で提唱する方法論の妥当性を検証した。なお，構造物の材料にはいずれの数値例についても鋼を想定し，ヤング率を209GPa，ポアソン比を0.3とした。 また，ペナルティを与えるパラメータpは1として最適化を図った。

４．１　荷重設定と最適構造の関係

最初に簡単な3次元問題について最適構造を求める。**Fig. 5**に設計領域を示す。図の固定設計領域Dの

左側の境界面を完全固定し，右側の境界面の中心に(a) z方向に荷重100Nを作用させた場合と(b) x軸まわりにトルク0.01N･mを作用させた場合の最適構造を得る。なお，最大時の断面積A_{max}はすべての梁要素について3.14×10^{-4}m^{2}とし，体積制約の上限値V^Uは固定設計領域全体積の1.0%とし，設計領域Dはx方向に4分割，y方向とz方向に2分割した。

Fig. 6に最適構造を示す。これより(a)，(b) 両方の場合について明瞭な最適構造が得られることがわかる。特に (b) の場合には梁構造が互いに90度で交差する格子構造を生成し，これは，せん断応力を梁の主応力方向である長手方向で受けるように，梁が配置された結果であると考えられる。

4．2　相互剛性と最適構造の関係

Fig. 7に示す2次元の最適設計問題により相互剛性

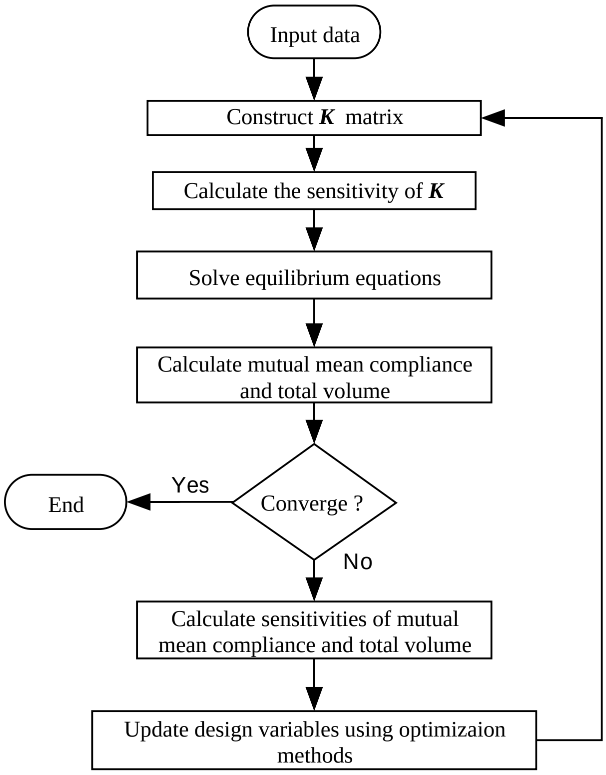


Fig. 4　Flowchart of optimization procedure.

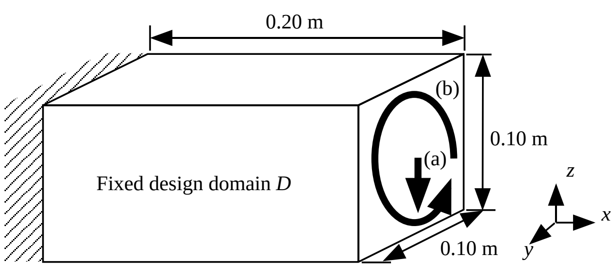


Fig. 5　Design domain of simple model 1.

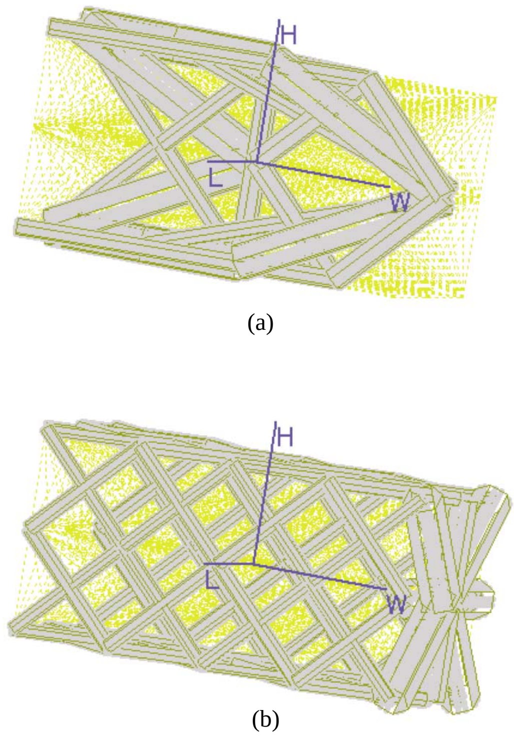


Fig. 6　Optimal configurations of simple model 1.

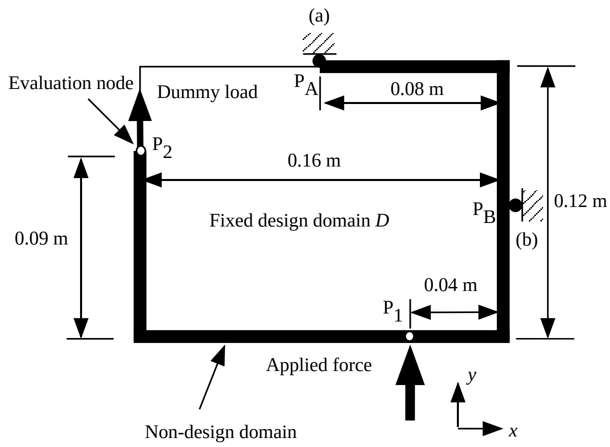


Fig. 7　Design domain of simple model 2.

と最適構造の関係を検討する。図に示したように，(a) P_A点を完全拘束した場合と，(b) P_B点を完全拘束の場合について，図のP_1点に荷重10Nを作用させたときのP_2点の変位を最小化する。なお，最大時の断面積A_{max}はすべての梁要素について$7.85 \times 10^{-5}\mathrm{m}^2$とし，体積制約の上限値$V^U$は固定設計領域全体積の1.0%とし，設計領域$D$は$x$方向，$y$方向ともに4分割した。さらに，図に示した部分については非設計領域とし，最適化の過程において常に$\rho_{v,i}$を1.0に設定した。

Fig. 8に最適構造を示す。これより，拘束位置の相違により梁要素の最適配置が変化することがわかる。すなわち，(a) の場合には，梁要素が主に荷重負荷節点と評価節点の両方に連結されるのに対して，(b) の場合には，主に荷重負荷節点に連結されている。

4．3　POAの考え方に基づいた最適設計

Fig. 9に示すT型構造の最適補強部位問題を例に，POAの考え方を示す。図に示したように，せん断パネルで構成されるT型構造の中心部の立体領域を設計領域とし，3通りの荷重を別々に作用させたマルチローディングの場合について最適化を行った。**Fig. 10**にPOAの考え方をもとに作成した最適化のためのシートを示す。このシートを使用すれば，ボタンを押すだけで自動的に解析モデルは作成され，最適化が実行される。さらに，スライダーバーを使用して設計領域を変えることにより，パラメトリックな解析も簡単に行うことがきる。**Fig. 11**に，体積制約の上限値V^Uを固定設計領域全体積の1.0%とした場合に得られた最適補強部位を示す。**Fig. 12**に，最

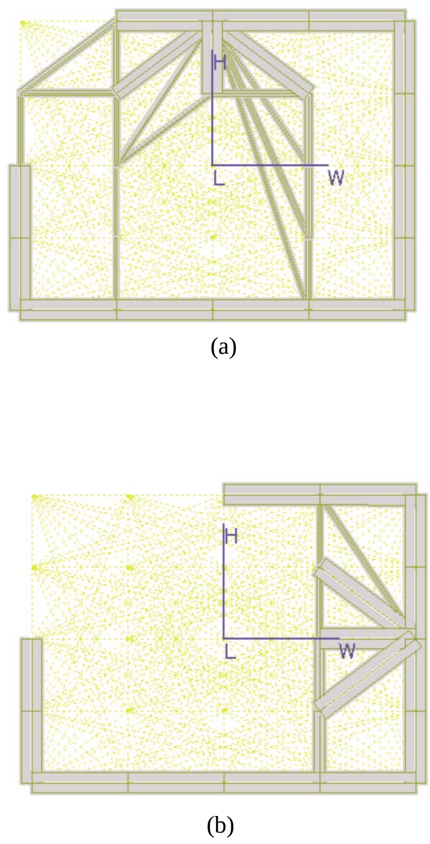


Fig. 8　Optimal configurations of simple model 2.

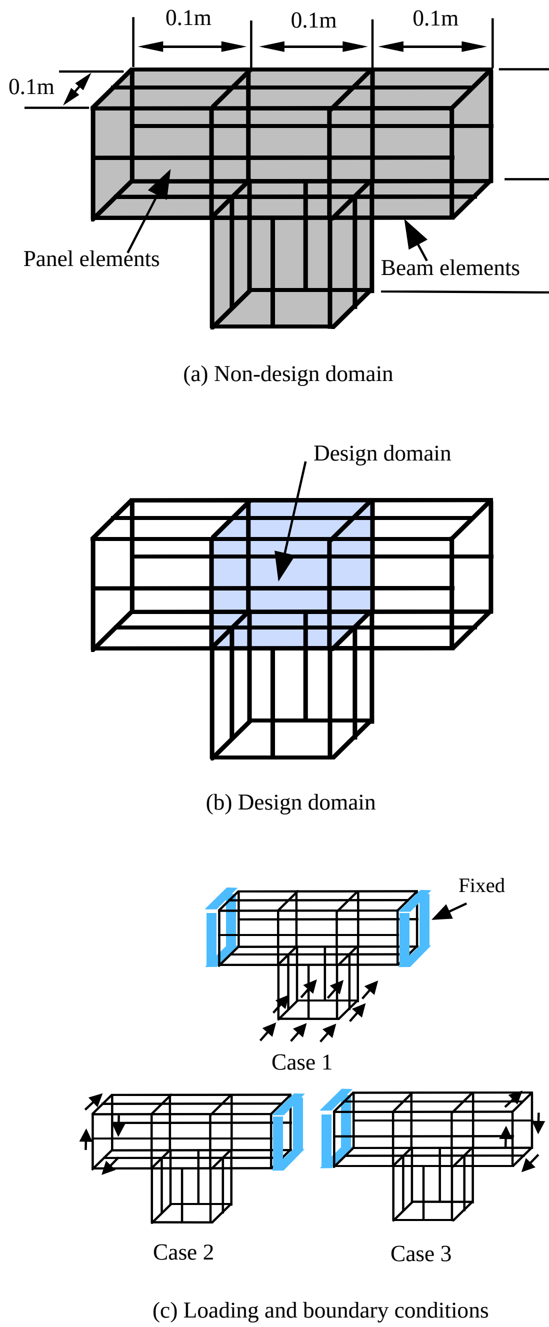


Fig. 9　Design domain of T-shape part.

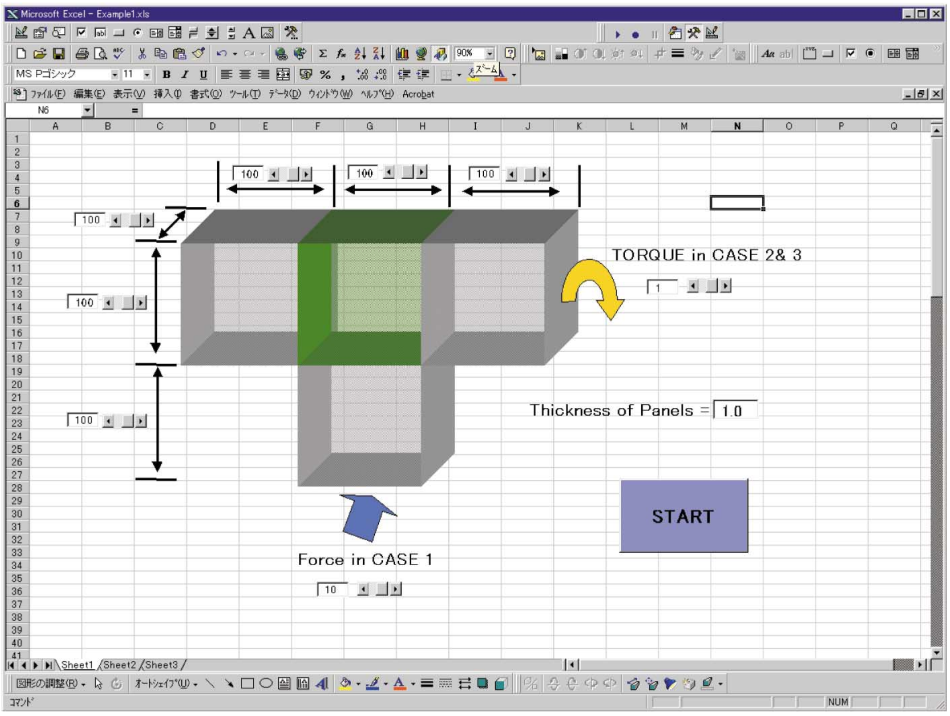


Fig. 10 Modeling and optimization sheet.

適構造の構造的なメカニズムを検討するために順解析を行った結果を示す。図中の円は各物理量の大きさを示している。この結果より，最適補強部位の各部分の機能を明確にできるので，有効な設計指針が得られると考える。

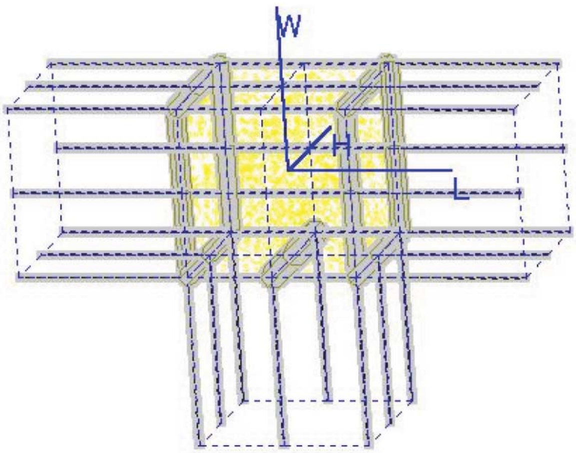


Fig. 11 Optimal reinforcement configuration of T-shape part.

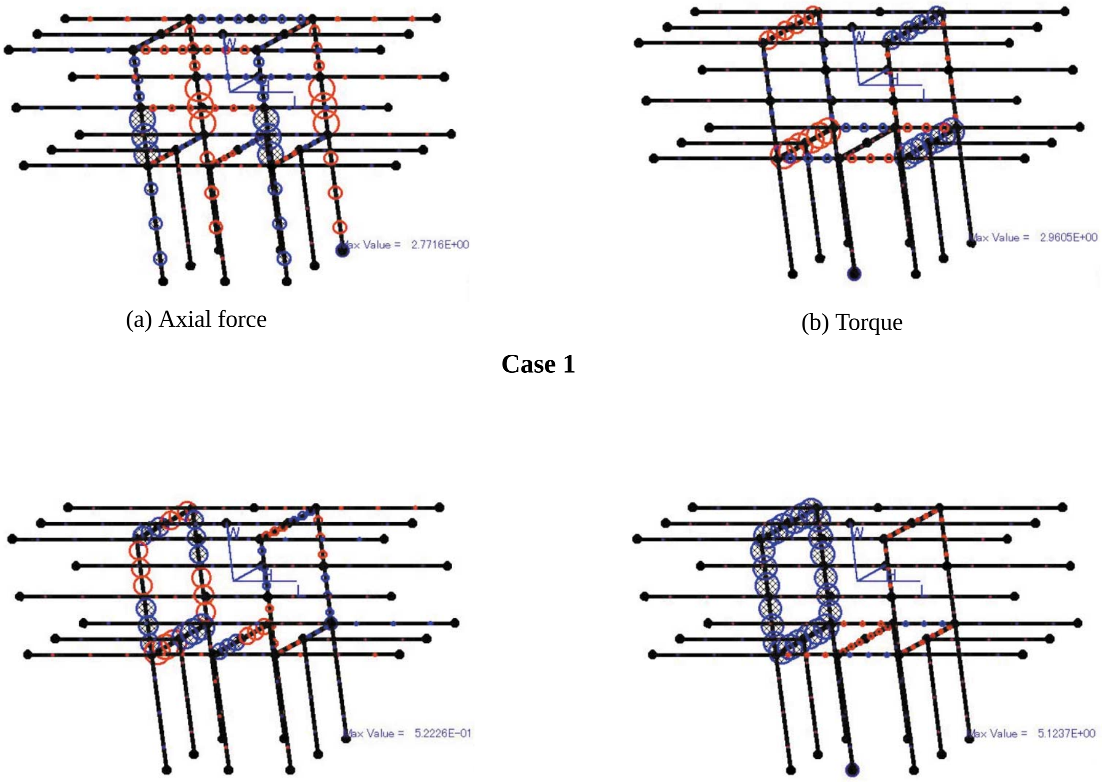
5．まとめ

本報告では，FOAの考え方に基づいたCAEの開発の一環として，POAに基づく最適設計の考え方を示すとともに，構造最適化の方法論として，梁要素とパネル要素を用いたトポロジー最適設計法を開発した。さらに，簡単な数値例により本研究で提案する方法の有効性を示した。今後は，さらに実際の設計現場における意見を，より反映できる最適設計法の開発へと展開していく予定である。

参考文献

1) Lemon, J. R., Tolani, S. K. and Klosterman, A. L. : "Integration and Implementation of Computer Aided Engineering and Related Manufacturing Capabilities into Mechanical Product Development Process", Gi-Jahrestagung (1980)

2) Nishigaki, H., Nishiwaki, S., Amago, T. and Kikuchi, N. : "First Order Analysis for Automotive Body Structure



(a) Axial force (b) Torque

Case 1

(a) Axial force (b) Torque

Case 2

Fig. 12 Distributions of the axial forces and torques.

Design", ASME DETC2000/DAC-14533, (2000)

3) Nishigaki, H., Nishiwaki, S., Amago, T., Kojima, Y. and Kikuchi, N. : "First Order Analysis - New CAE Tools for Automotive Body Designers", SAE Tech. Pap. Ser. , No.2001-01-0768 (2001)

4) Shield, R. T. and Prager, W. J. : "Optimal Structural Design for Given Deflection", J. Appl. Math. and Phys., ZAMP, **21** (1970), 513-523.

5) Bendsøe, M. P. and Kikuchi, N. : "Generating Optimal Topologies in Structural Design Using a Homogenization Method", Compt. Methods. Appl. Mech. Eng., **71** (1988), 197-224

6) Yang, R. J. and Chahande, A. I. : "Automotive Applications of Topology Optimization", Struct. Optimization, **9** (1995), 245-249

7) 西脇眞二, 西垣英一, 鶴見康昭, 小島芳生, 菊池昇 : " 梁要素を用いたトポロジー最適化 (第1報 静的な剛性の最大化の場合)", 日本機械学会論文集, **67**-662 (2001), 3069-3077

8) 尼子龍幸, 西脇眞二, 西垣英一, 小島芳生, 菊池昇 : " First Order Analysisにおける構造最適化 (断面形状とトポロジーの同時最適化)", 日本機械学会第11回設計工学講演会, (2001), 273-275

9) Sekiguchi, M. and Kikuchi, N. : "Remark on the Mixed Formulation of a Finite Element Stiffness Matrix Based on Clough's Paper in 1960", Proc. Conf. Comput. Eng. and Sci., JSCES, Tokyo, Jpn., **4**-1(1999), 131-134

10) Fleury, C. and Braibant, V. : "Structural Optimization: A New Dual Method Using Mixed Variables", Int. J. Numer. Methods. Eng., **23** (1986), 409-428

(2001年12月11日原稿受付)

著者紹介

西脇眞二 Shinji Nishiwaki

生年：1962年。
所属：設計工学研究室。

分野：設計支援技術の開発。
学会等：日本機械学会，精密工学会会員。
Ph. D.