

研究報告

FOAにおける応答曲面法による寸法最適化

尼子龍幸

Sizing Optimization Using Response Surface Method in FOA

Tatsuyuki Amago

要 旨

CAEは、車両開発の分野において、開発期間の短縮や試作行程の削減に大いに貢献している。しかし、このような詳細CAEは専任者でなければ使用することは困難なため、開発の初期である概念設計段階に設計者が自らCAEを用いることは難しい状況にある。そこで、設計の初期段階で使用する新しいCAEとしてFirst Order Analysis (FOA) が提案されている。そのFOAにおける最適化計算手法の一つとして、剛性や重量等の目標値に対する形状寸法の最適値やその影響度を算出する寸法最適化に、応答曲面法を採用した。本論では、最初に近年数値解析の分野で注目の高い応答曲面法の概要を説明する。次に、2次元の簡単な数値例をもとに、開発したFOAの寸法最適化プログラムを解説するとともに、本手法の有効性を示す。

キーワード CAE, 最適設計, 寸法最適化, 実験計画法, 応答曲面法

Abstract

Computer Aided Engineering (CAE) has played an important role in automotive development. CAE numerically estimates the performance of automobiles and proposes alternative ideas that lead to higher performance without building physical prototypes. However, current CAE can not usually be used in the initial design phase due to its sophisticated, difficult, and complex functions and characteristics. First Order Analysis (FOA) has been proposed to provide a new type of CAE for design engineers. In this report, we present a sizing optimization method based on the response surface method. This method can comparatively deal with any objective functions such as the structural stiffness and the weight of a structure. First, we briefly review the outlines of the response surface method, and benefits when using this method in the numerical analysis. Next, a sizing optimization program is introduced, and its functions are explained in detail using a simple two-dimensional optimization problem. Finally, some examples are provided to confirm the availability of the method proposed here.

Keywords Computer aided engineering, Optimal design, Sizing optimization, Design of experiment, Response surface methodology

1. はじめに

CAEの高度化に伴い、車両開発の分野においても、車両性能はある程度定量的に予測可能となり、性能を向上させるような構造提案ができるようになってきている。その結果CAEは、開発期間の短縮や、試作行程の削減に大いに貢献している。ただし現在のCAEは、試作実験を解析に置換える数値実験に用いられている。それゆえに、このような詳細CAEは定量的な精度が要求されるため、モデル化方法や解析方法が複雑化しており、専門の解析者でなければ実

施することは困難である。その上、詳細CAEはモデル作成と解析時間に多大な時間が必要とされる。以上の理由から、設計の初期である概念設計段階で、設計者自らがCAEを用いることは困難である状況が見受けられる。

このような状況に対して、設計初期段階に設計者自らが容易に使用できる新しいCAEの考え方としてFirst Order Analysis (FOA)¹⁾が提案されている。

FOAは設計案の物理特性をリアルタイムに設計者に見せながら、概念設計の過程の中で素性の良い設計案を創出できる。それと同時に、設計者を支援す

るため、トポロジー最適化や寸法最適化を促す最適計算手法も備えている²⁾。

FOAにおける寸法最適化では、高速性・簡便性等から応答曲面法による最適化手法を採用している。

本論では、FOAの寸法最適化に適用した応答曲面法を概説し、簡単な数値例によりその妥当性と有効性を検証する。

2. 応答曲面法による最適化

最近、数値解析の分野において最適化手法の一つとして注目されている応答曲面法は、1951年Box & Wilsonにより提唱され³⁾、その後、田口による田口メソッド⁴⁾や、Myers & Montgomeryらによるさまざまな手法の実験計画法の研究とともに現在の応答曲面法⁵⁾へと発展した。その手法は、製品プロセスの最適化やばらつきの減少等、品質工学の分野において特にアメリカで実用化された。

この応答曲面法が数値解析の分野に適用され始めたのは、1995年頃からで、アメリカではHaftkaらによる超大型旅客機の複合材を用いた翼の最適化⁶⁾に使用され、日本では、同時期に全く違った発想から白鳥らが自動車のシートフレームの最適化⁷⁾に適用した。

2.1 数値解析における応答曲面法

応答曲面法とは、最適化問題の目標関数等に近似手法を用いた最適化の一つで、その近似に、応答曲面と呼ばれる関数を使った手法である。応答曲面とは、設計変数と状態量の間を何点かの解析もしくは実験結果を用いて近似した関数である。一般的には、解析や実験点のパラメータ設定に実験計画法が使われ、関数の近似に最小二乗法が使われる。

Fig. 1に通常の最適化の流れを示す。数値解析の

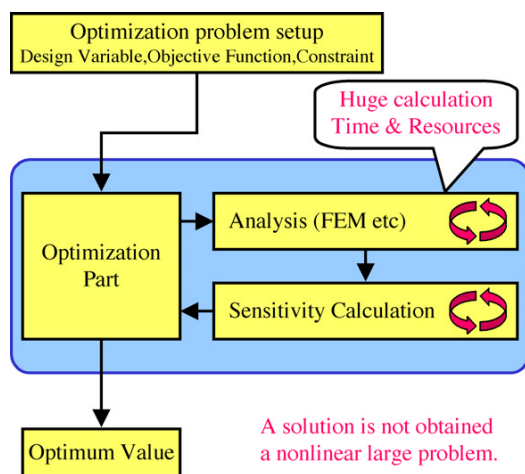


Fig. 1 Conventional optimization.

分野では、それぞれの数値モデルに関する感度を求め、その感度と数値モデルとを用いて最適化を行う手法が一般的である。この手法では数値解析と感度解析を繰返しながら、最適解が得られるまで収束計算を行うため、モデル規模が大きくなった場合には計算時間と容量を非常に多く必要とし、実質上最適化は不可能となる。また、非常に非線形性の強い問題や多峰性の問題では、感度が得られなかったり、局所解に陥ってしまう等の問題で解が求まらないケースもある。このような従来の最適化の問題を解決するために、応答曲面法が使用されるようになった。

応答曲面法では、最適化の条件設定を行った後に、設計変数と目標関数や制約条件との間で応答曲面を作成する。そして、その応答曲面を用いて、従来からある最適化手法により最適解を求める。このように、最適化計算の中には応答曲面という非常に簡素化された関数しか存在しないため、その部分の計算は非常に早くなる (Fig. 2)。

ただし、最適解の精度は応答曲面の近似精度に依存することになる。

前述のように、応答曲面法では、一般には実験計画法によってパラメータの設定を行い、その設定に基づいた回数の数値解析を実施する。次に、その結果を基に目標関数や制約条件を応答曲面として近似する。このように、実験計画法を使うことで応答曲面の信頼度を高めることができる。

2.2 応答曲面

応答曲面 (Response surface) とは、 n 個 ($n > 1$) の設計変数 x_i ($i = 1 \dots n$) から予測される応答 y の関係式を近似したものである (式(1))。

$$y = f(x_1 \dots x_n) + \varepsilon \quad (1)$$

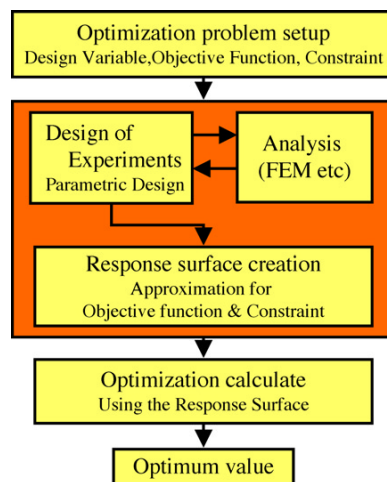


Fig. 2 Response Surface Methodology (RSM).

一般的には、この関数 f は、取り扱いが簡単なことから多項式が用いられることが多いが、変数変換により線形化可能な非線形関数（指数関数等）も用いられる。

特殊な場合では、ニューラルネットワークやスプライン、ラグランジェの補間も応答曲面と言える。ただし、これらの関数等は、有効な実験計画法との対応が取れていないことと、統計的に評価することができないことが欠点である。

2.2.1 最小二乗法

応答曲面では、線形関数や線形化変換可能な関数は、最小二乗法を用いることで容易にその係数が求められることや、求めた関数に対する統計的評価ができる利点がある。そのために、最小二乗法を用いた関数近似が応答曲面法の主流となっている。

応答関数として2次多項式を用いた場合、応答曲面は式(2)のようになる。

$$y = \beta_0 + \sum_{i=0}^n \beta_i x_i + \sum_{i=0}^n \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{i < j} \beta_{ij} x_i x_j \quad (2)$$

これを簡素化のために2変数として現すと、式(3)となる。

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_2^2 + \beta_4 x_2^2 + \beta_5 x_1 x_2 \quad (3)$$

この式で2次の項をそれぞれ1変数として置換 ($x_1^2 = x_3$, $x_2^2 = x_4$, $x_1 x_2 = x_5$) すると、この式は多変数1次式に変換される。この変換は、3次以上の多項式に関しても同様に可能である。

このように線形化されれば、実験点（解析点）の数を n 、設計変数の数を k とすると、線形回帰モデルは、式(4)の形で表すことができる。

$$y = X\beta + \varepsilon \quad (4)$$

$$y = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix} X = \begin{Bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{Bmatrix} \beta = \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{Bmatrix} \varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{Bmatrix}$$

この誤差の二乗和を最小とすることで、係数 β の不偏推定量 b が式(5)のように得られる。

$$b = (X^T X)^{-1} X^T y \quad (5)$$

一般に回帰モデルが適切か否かの判定は、決定係数 R^2 を用いる。決定係数は、 R^2 は1で完全に一致し、残差が増えると1～0の範囲で減少する。ただし、変数の数が増えると残差が減少するため、決定係数は値が高くなる。そのため、より一般的な回帰モデルの判定には、単位自由度あたりの残差を比較する自由度調整決定係数 R_{ad}^2 (式(6))によって評価する。

$$R_{ad}^2 = 1 - \frac{SSE / (n - k - 1)}{Syy / (n - 1)} \quad (6)$$

残差平方和: $SSE = y^T y - b^T X^T y$

応答 y の変動: $Syy = y^T y - T^2/n$

また、それぞれの変数においては、 t 検定、 F 検定を行うことで応答に対する有効性を判定できる。

2.3 実験計画法

実験計画法は、もともと効率の良い実験点のパラメータを作る手法である。このことはより良い回帰式を作成するためのパラメータを作ることと等価になる。この回帰式そのものが、前節で説明した最小二乗法を用いた応答曲面となる。

実験計画法においては、連続した変数であってもすべての変数を水準という離散化した形で考える。このように、変数を離散化することで組合せの数を減少させることが可能であるとともにノイズに強くなるという利点も有している。

実験計画法には全因子計画、直交計画、中央複合計画 (CCD)、D最適化基準等多数の手法が提案されている。一般には、1次多項式には直交計画が良く使われ、2次多項式にはCCDが使われているが、水準の割付けの容易さや効率性から、直交計画を用いる方法が使いやすいと思われる。ここでは直交計画の概略を説明する。

2.3.1 直交計画

直交計画は、直交表を用いて水準を割付けることでパラメータの設定を行う。Table 1に2水準のL8直交表を示す。この表の縦方向の行は実験回数を表し、変数の水準を各列に対して指示どおり割付けることで、パラメータが簡単に設定可能である。

線形関数には、2水準の直交表、2次関数には3水準の直交表が使われ、3次以上の高次に対応した直交表も作成可能である。ただし、多水準の直交表の場合直交実験とならないため、2次以上の高次多項式には直交多項式が必要となる。一般的には、チェビシェフの直交多項式がよく使われる。このように、

Table 1 L8(2^7) orthogonal arrays.

No.	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2

直交多項式と直交表を用いることで多水準の場合も直交実験となる。

一般に直交計画は、低次のものやそれぞれの変数の交互作用がないものに関しては非常に効率的であるが、高次や交互作用が多くなると、パラメータセットの数（実験数）が多くなると、回帰モデルが直交多項式に制限されるという欠点がある。しかし、どの直交表を選ぶかだけでパラメータの設定が可能であり、簡便性に優れている。

3．FOA寸法最適化への適用

3．1 適用モデルと設計変数

FOAにおける寸法最適化は、トポロジー最適計算法等で求められた形状や、既存の設計例をベースに、その寸法の最適値を種々の実用上の制約を加味した条件下で求める役割を持つと言える。そのため同時に、いくつかある設計パラメータのどれを選択すべきかの性能影響度に関する情報も得られる。

そこで、本研究ではパラメータ設定の柔軟性（簡便性）や高速性を考慮して、応答曲面法⁵⁾を採用した。ここでは、6本の梁で構成されたFig. 3のような問題を例題として、本手法の適用性を評価する。

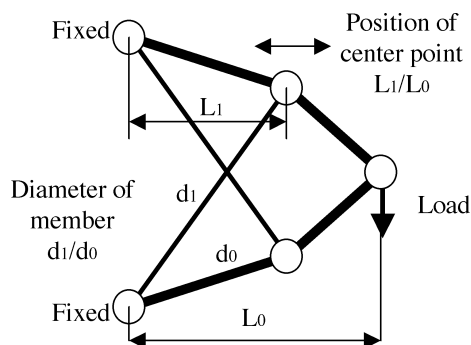


Fig. 3 Example of shape optimization.

Table 2 Condition of optimization.

	Variable	Minimum	Maximum
Design variable	Position of center point	0.1	0.9
	Diameter of member	0.1	0.9
Objective function	Stiffness	Maximize	
	Weight	Minimize	

例題の構造はFig. 3のように上下対称とし、構成される梁は丸棒とした。設計変数は、中央点の左右方向の位置と、クロスしている部材の直径とした。それぞれ中央点の位置は全体の長さとの比率で、直径はその他の部材との直径比で正規化して表現している。目標関数としては、負荷点での剛性の最大化と、重量の最小化の二つとした。Table 2に最適化の条件を示す。

3．2 実験計画法と応答曲面法

今回の例題においては3水準系の直交表を用いて実施した。設計変数は2変数のためL9直交表を用いた。Table 3にL9直交表に設計変数を割振って、

Table 3 L9 orthogonal arrays.

	Position of center point	Diameter of member
1	0.1	0.1
2	0.1	0.5
3	0.1	0.9
4	0.5	0.1
5	0.5	0.5
6	0.5	0.9
7	0.9	0.1
8	0.9	0.5
9	0.9	0.9

Table 4 Result & Objective function.

	Stiffness	Total mass	Objective function
1	0.7958	4.1996	4.9954
2	0.9572	2.1613	3.1185
3	1.1186	1.649	2.7676
4	0.7605	0.1685	0.929
5	0.9528	0.1684	1.1213
6	1.1451	0.1684	1.3135
7	0.84	0.2648	1.1048
8	1.09	0.1242	1.2142
9	1.3399	0.0958	1.4357

Table 4に直交表に基づいて解析した剛性と重量を、それぞれの平均値で正規化して示す。目標関数は、対象となる特性値が剛性と重量とで多目的となるため、重み付け問題として単一目標関数にした。

Fig. 4には、分散分析を実施した後の設計変数に対する平均値プロットを示す。このグラフによって、それぞれの設計変数の優位性や影響度（感度）が容易に判定できる。本例題では中央点位置の影響度が大きく、変化は2次関数で表現できること等が判断できる。

Fig. 5に本例題の目標関数に対する応答曲面の分布を示す。この関数を、線形計画法などを用いて最小化問題として解くことによって、最適解が得られる。

Fig. 6に最適化後の形状を、Table 5に設計変数の最適値を示す。求められた最適解は、負荷点および交差部分において二つの梁のなす角度が約90度になる。

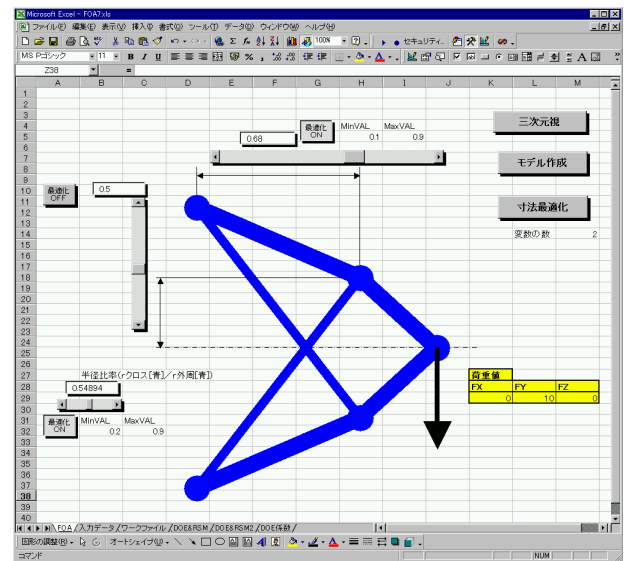


Fig. 6 Optimal design.

Table 5 Optimal design value.

Variable	Optimal value
Position of center point	0.679
Diameter of member	0.549

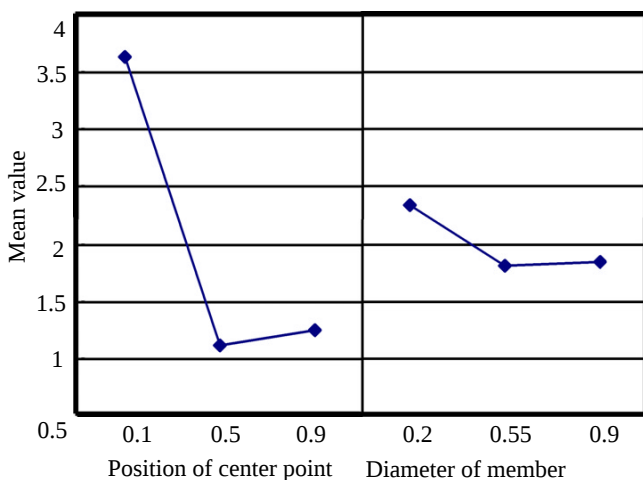


Fig. 4 Mean value plots.

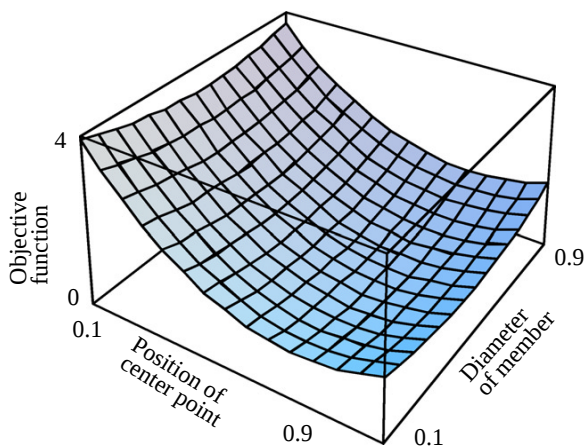


Fig. 5 Response surface.

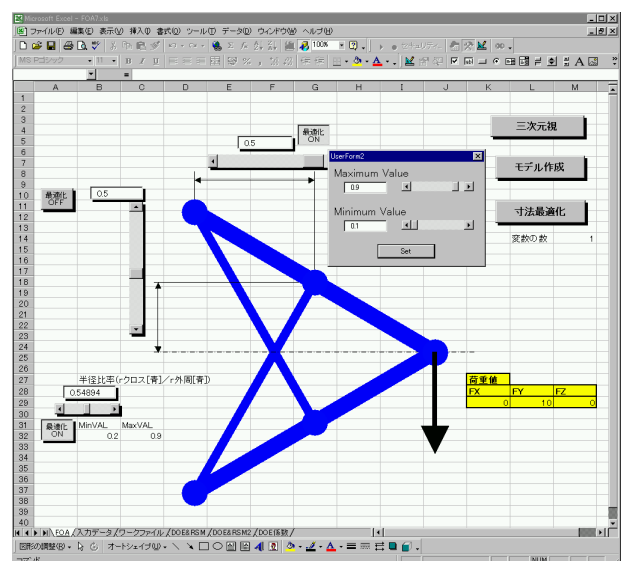


Fig. 7 Shape optimization sheet of FOA.

る形状となった。この角度の方向が、せん断荷重に対しては主応力の方向となり、梁として一番剛性の高い軸方向がこの方向と一致している。また、この結果は平面要素によるトポロジー最適化の結果⁸⁾と良く一致している。以上のように、最適解は妥当な結果を示しており、本手法の妥当性が示された。

3. 3 FOAプログラム

本手法を用いたFOAのプログラムを、上記例題を対象とするとFig. 7のようになる。FOAの中では、最適化する設計変数を選択し、その上下限界を定義するだけで、自動的に直交表等のパラメータセットが作成される。その後、セットされた回数の解析が実行され、結果から応答曲面法に基づく最適化が自動的に行われる。一連の計算はMicrosoft/Excelのマクロで実行され、設計者は簡便なシート操作のみで最適な形状を得ることができる (Fig. 6)。

4. まとめ

FOAにおける寸法最適化に関して、応答曲面法による最適計算法を導入した。その応答曲面法の概要を説明し、2次元の梁問題を例題として本手法の有効性を確認した。

FOAにおいては、実際の設計手順に沿った設計案の改善ができると同時に、最適計算の機能を利用することで初期設計案の創成や実用性を考慮した寸法の最適化が簡便に可能となる。

参考文献

- 1) Nishigaki, H., Nishiwaki, S., Amago, T. and Kikuchi, N. : "First Order Analysis for Automotive Body Structure Design", ASME DECT2000/DAC-14533
- 2) 尼子龍幸, 西垣英一, 西脇眞二, 小島芳生, 菊池昇 : "FOA (First Order Analysis)における最適化", 日本機械学会第4回最適化シンポジウム講演論文集, (2000), 199-204
- 3) Box, G. E. P. and Wilson, K. B. : "On the Experimental Attainment of Optimum Conditions", J. of the Royal Statistical Soc., B-13(1951), 1-45
- 4) 田口, 実験計画法, 第3版, 上下(1976), 丸善
- 5) Myers, R. H., Montgomery, D. C. : Response Surface Methodology, (1995), John Wiley & Sons, Inc.
- 6) Harrison, P. N., Le Riche, R. and Haftka, R. T. : "Design of Stiffened Composite Panels by Genetic Algorithms and Response Surface Approximations", AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, AIAA-95-1163, (1995), 58-68
- 7) 柏村, 白鳥, 宇, 国府 : "数理計画法を用いた構造最適化", 日本機械学会論文集A編, 62-601(1996), 2180-2185
- 8) Suzuki, K. and Kikuchi, N. : "A Homogenization Method for Shape and Topology Optimization", Comp. Methods. Appl. Mech. Eng., 93(1991), 291-318

(2001年12月11日原稿受付)

著者紹介



尼子龍幸 Tatsuyuki Amago

生年：1963年。

所属：第14研究領域。

分野：ボデー構造の初期設計法に関する研究。ブレーキ摩擦振動に関する研究。人体有限要素モデルに関する研究。

学会等：日本機械学会会員。